



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PISA
FACOLTA' DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE
INGEGNERIA ELETTRICA

ANALISI, MODELLAZIONE E OTTIMIZZAZIONE
DEL FUNZIONAMENTO DI UN SISTEMA DI
CONVERSIONE PER L'ENERGIA DA MOTO
ONDOSO

RELATORI
Prof. Ing. LUCA SANI
Ing. ROBERTO SUFFREDINI

CANDIDATO
LUCA COLLEGIANI

Anno Accademico 2013-2014

1. Riassunto analitico

Il progetto di tesi svolto in collaborazione con ENEL Ingegneria e Ricerca ha l'obiettivo di definire un modello di un sistema di conversione in energia elettrica dell'energia derivante dal moto ondoso. L'elaborato si occupa della modellazione del processo di trasformazione dell'energia e delle strategie di controllo necessarie per il funzionamento di un convertitore da moto ondoso. Al suo interno si trovano, brevemente descritte, le basi teoriche che consentono di definire le equazioni che determinano il comportamento dei singoli componenti e le logiche scelte per il controllo. Le interazioni tra i vari dispositivi che compongono il convertitore consentono di ricavare, sotto alcune ipotesi, il modello logico-matematico dello stesso.

Il modello dei vari componenti e dei blocchi logici di controllo è realizzato mediante il software Matlab-Simulink. Il modello è funzionale ad un primo approccio con la tematica della conversione diretta dell'energia del moto ondoso ed è pertanto definito in una forma semplificata. I valori di ingresso e le grandezze più significative in uscita sono rappresentati nel dominio del tempo.

I risultati sono stati ottenuti testando il modello con opportuni parametri, che sono inseriti con l'unico scopo di verificare il comportamento del sistema e come tali non intendono ancora presentare un convertitore ottimale. La corretta identificazione di questi parametri deve essere svolta mediante l'impiego di altri software (metodi F.E.M), che consentiranno il dimensionamento fisico dei vari elementi costituenti (boa galleggiante, generatore lineare).

Indice

1.	Riassunto analitico.....	2
2.	Introduzione.....	4
3.	Stato dell'arte dei WEC	7
3.1.	Classificazione dei dispositivi	7
3.2.	Power take off	11
4.	Teoria lineare delle onde.....	13
4.1.	Formazione del moto ondoso.....	13
4.2.	Onde regolari	15
4.3.	Impostazione del problema	16
4.4.	Teoria linearizzata per onde di piccola ampiezza	22
4.5.	Proprietà delle onde:	25
4.6.	Onde piane	30
4.7.	Energia e potenza	32
4.8.	La random linear wave theory.....	34
4.9.	Sea-state e parametri ingegneristici.....	38
4.10.	L'interazione corpo-moto ondoso	39
4.11.	Forze sul galleggiante.....	47
5.	Macchine elettriche lineari	51
5.1.	Classificazione delle macchine lineari	51
5.2.	La dinamica delle macchine lineari	57
6.	La modellizzazione ed il controllo del WEC.....	62
6.1.	L'architettura del sistema di controllo.....	62
6.2.	La space vector modulation	64
6.3.	Il modello della macchina elettrica	65
6.4.	Il modello del galleggiante.....	68
6.5.	Il progetto dei regolatori di corrente.....	69
6.6.	La mappatura delle correnti	76
6.7.	L'algoritmo di controllo.....	85
6.8.	Modelli più accurati WEC	89
7.	Il modello completo e le simulazioni.....	94
7.1.	Il modello completo e le simulazioni.....	94
8.	Conclusioni e sviluppi successivi.....	113
9.	Bibliografia.....	115
10.	Appendici.....	116
10.1.	La trasformata di variabili	116
10.2.	La space vector modulation	119
10.3.	Realizzazione della funzione di trasferimento discreta	127

2. Introduzione

La strategia energetica che l'UE vuole adottare prevede una riduzione di almeno il 20% dei gas-serra nel 2020. Per perseguire questo obiettivo sarà necessario un ampio utilizzo delle fonti rinnovabili, con l'utilizzo sempre più consistente di tecnologie di generazione off-shore, in particolare da fonte eolica. Un forte impiego di questa tecnologia comporta un'elevata occupazione di spazi marini che devono essere sfruttati al meglio al fine di preservare l'ambiente. Anche per questo motivo è stato attivato il progetto di ricerca MERMAID: *Innovative Multi-purpose offshore platforms: planning, design and operation*, cofinanziato dall'Unione Europea nell'ambito del *Seventh Framework Programme for Research FP7* di cui ENEL è partner, nell'ambito del quale ci si prefigge di sviluppare l'integrazione fra i diversi sistemi di generazione da energia marina (eolico, da moto ondoso, da correnti marine, ecc.) ed altri usi quali ad esempio l'itticoltura e la logistica dei trasporti. Un esempio di multi-use platform è mostrato in Figura 2-1.



Figura 2-1: Esempio di multi-use platform

E' prevedibile che nei prossimi anni la produzione di energia elettrica da moto ondoso avrà una notevole espansione e costituirà un'ottima opportunità di business per le aziende energetiche. La tesi proposta, quindi, inizia ad analizzare queste tematiche e ha l'obiettivo di creare l'architettura di un

primo modello analitico che consenta di rilevare l'andamento delle grandezze più significative del processo di conversione in energia elettrica.

In primo luogo si va ad analizzare la fonte energetica che si intende sfruttare. L'energia che si ricava dal mare è suddivisibile in diverse tipologie¹:

- 1) Energia mareomotrice
- 2) Energia dal moto ondoso
- 3) Energia derivante dalle correnti sottomarine
- 4) Energia del gradiente termico oceanico

L'energia mareomotrice è l'energia ricavabile dall'interazione mare-luna che provoca l'innalzamento di grandi quantità di acqua (maree). L'energia dal moto ondoso, sulla quale si focalizza il seguente elaborato, è invece l'energia posseduta dalle onde create dal vento che soffia sulla superficie libera del mare. L'energia derivante dal gradiente termico è individuata dalla differenza di temperatura tra correnti superficiali e profonde, che può alimentare un ciclo termodinamico.

Nella tesi si descrivono con una breve panoramica i principali dispositivi che consentono la conversione dell'energia posseduta dal moto ondoso in energia elettrica. Questi dispositivi sono chiamati in linguaggio tecnico Wave Energy Convert (WEC). Ogni WEC è caratterizzato da una struttura intermedia definita Power take Off PTO, che consente di trasformare l'energia appartenente al moto fisico del convertitore in una forma che permetta una più facile conversione in energia elettrica.

L'elaborato si concentra sui PTO che convertono direttamente l'energia meccanica del dispositivo in energia elettrica (direct-drive). L'obiettivo della tesi è quello di costruire un modello dell'intero convertitore costituito nelle sue parti principali da un galleggiante e da un generatore lineare.

Successivamente è implementata su di esso una particolare strategia di controllo, chiamata controllo reattivo, che consente di estrarre la massima quantità di potenza dal dispositivo.

Prima di entrare nel dettaglio della modellazione, è introdotta la fisica del moto ondoso seguendo la Linear Wave Theory. Viene introdotta una panoramica sulle principali tipologie di generatori lineari per poi focalizzare la modellazione sulla macchina sincrona lineare a riluttanza variabile.

Una volta completato il modello si ha una struttura parametrica che, tenendo conto di tutte le semplificazioni introdotte, permette di valutare l'energia prodotta in rete e tutte le grandezze fondamentali caratterizzanti l'intero dispositivo (correnti, tensioni, forze ecc.).

Il modello, realizzato con il software Matlab-Simulink, fornirà gli andamenti delle grandezze sopra citate una volta che, all'interno di esso, saranno inseriti determinati parametri che caratterizzano lo stato di mare, la tipologia di galleggiante e la macchina elettrica.

¹ Come mostrato in [R. Benifei 10]

Una volta ultimato il modello, questo presenterà ancora un alto grado di approssimazione, data anche la formulazione generale su cui è impostato il problema. Può quindi essere usato per una stima di massima delle grandezze più rilevanti, o come base per la costruzione di un modello specifico che consenta, grazie all'ausilio di metodi FEM, la progettazione dei componenti.

3. Stato dell'arte dei WEC

3.1. Classificazione dei dispositivi

I dispositivi che trasformano l'energia contenuta nelle onde del mare in energia elettrica sono chiamati Wave Energy Convert. Attualmente sono presenti molte tipologie di WECs. In questo capitolo verranno eseguite alcune classificazioni ed illustrati in modo descrittivo i principali dispositivi². Una prima classificazione è fatta in base alla posizione in cui il dispositivo è installato:

1. Shoreline device: sono dispositivi installati sulla linea di costa . Questi dispositivi hanno il vantaggio di una più facile e meno costosa manutenzione e sono più facili rispetto agli altri da connettere alla rete elettrica. Lo svantaggio principale è che in acque poco profonde si ha a disposizione una energia minore rispetto ad acque più profonde.
2. Nearshore device: sono dispositivi installati in acque basse. Per acque basse, in genere, si intende profondità inferiori ad un quarto di lunghezza d'onda. Questi dispositivi sono spesso installati sul fondo del mare ed offrono una base stabile su cui un dispositivo galleggiante può andare a lavorare. Anche in questo caso l'energia che si riesce ad estrarre è piccola rispetto a dispositivi offshore.
3. Offshore device: sono dispositivi installati in acque profonde. La definizione di acque profonde varia a seconda dei contesti, se ne riportano le principali definizioni: profondità dell'ordine di grandezza di una decina di metri, profondità maggiori di quaranta metri, profondità maggiori di oltre un terzo di lunghezza d'onda. Questi dispositivi se da un lato hanno il vantaggio di poter sfruttare la maggiore energia derivata dal moto ondoso, dall'altro hanno maggiori costi di manutenzione, di installazione e di costruzione (il dispositivo deve essere capace di sopportare condizioni gravose che si possono manifestare in mare aperto).

Nella tabella che segue sono indicati i valori di energia sfruttabili da dispositivi installati nelle varie posizioni (i dati si riferiscono al Regno Unito):

Location	Annual energy production (TWh)
Shoreline	0.4
Nearshore	2.1
Offshore	50

Figura 3.1-1:Valori di energia in base alla profondità del mare

² Come mostrato [BDrew 09] e [Baker 03]

Un altro tipo di classificazione può essere fatta in base al principio di funzionamento dei dispositivi.

Nonostante le tipologie di WEC sono svariate è possibile classificarle principalmente in tre categorie:

1. Attenuator: è un dispositivo installato parallelamente alla principale direzione dell'onda incidente. Un convertitore di questo tipo è stato sviluppato dall' Ocean Power Delivery ed è conosciuto come Pelamis Wave Power.



Figura 3.1-2: Attenuator device

2. Terminator: e' installato parallelamente al fronte d'onda. Un esempio di questo dispositivo è il Salter's Duck sviluppato dalla università di Edimburgo.

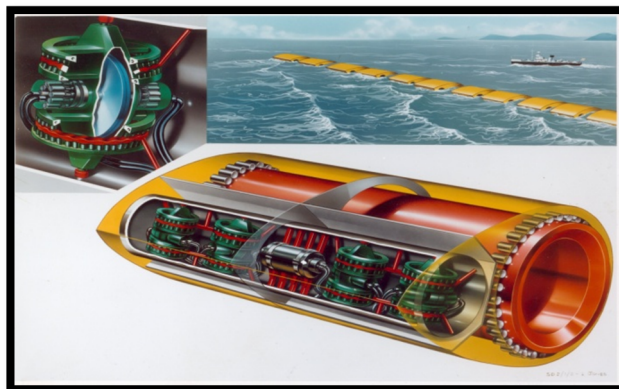


Figura 3.1-3: Terminator device: Salter's Duck

3. Point absorber: è un dispositivo che possiede una piccola dimensione rispetto alla lunghezza dell'onda incidente. Un esempio di questi dispositivi è l'OPT (Ocean Power Technology) Powerbuoy.



Figura 3.1-4: Point absorber device: OPT Powerbuoy

I dispositivi sono classificati anche per il loro modo di operare:

1. Submerged pressure differential: è un point absorber sommerso che sfrutta la differenza di pressione tra la cresta dell'onda e il dispositivo. Un esempio di questo dispositivo è l' Archimede Wave Swing.



Figura 3.1-5: Archimedes Wave Swing

2. Oscillating wave surge converter: è un dispositivo terminator composto da una serie di deflettori azionati dall'onda del mare. Un esempio è l'Aquamarine Power Oyster.

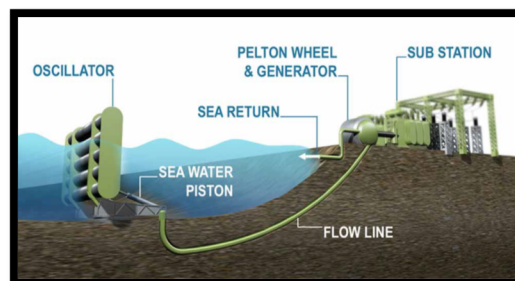


Figura 3.1-6: Aquamarine Power Oyster

3. Oscillating water column (OWC): è un dispositivo che sfrutta l'energia del moto ondoso per variare la pressione dell'aria che aziona una turbina Well.

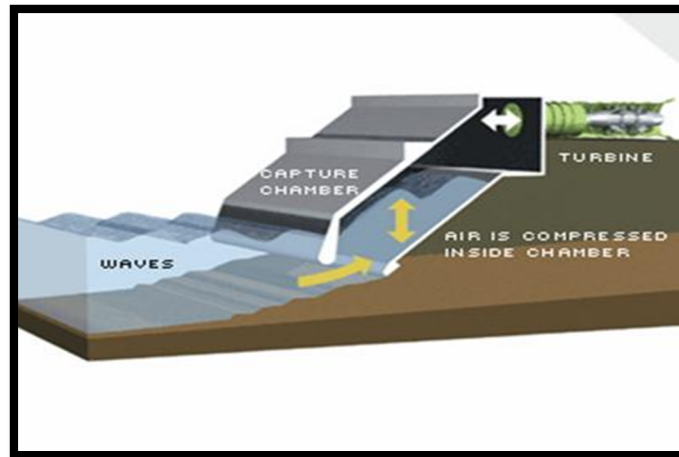


Figura 3.1-7: Oscillating Water Coulom

4. Overtopping device: sfrutta l'acqua che l'onda incidente trasporta su un opportuno serbatoio, l'acqua attraverserà una turbina per la conversione energetica. Un esempio di questo dispositivo è lo Wave Dragon.



Figura 3.1-8:Wave dragon

3.2. Power take off

I vari WEC descritti in precedenza devono essere equipaggiati con un sistema che consente loro di convertire l'energia del moto ondoso in una forma tale da essere compatibile con la macchina elettrica ad essi asservita. Tale sistema di conversione è chiamato Power Take Off (P.T.O). Le tipologie di PTO sono essenzialmente³:

1. Collegamento meccanico diretto: utilizza un cambio meccanico che consente la trasformazione dell'energia dell'onda (caratterizzata da bassa velocità ed alta forza) in una forma più idonea ad attivare un generatore rotante. Il cambio presenta molti svantaggi in termini di complessità di costruzione e di manutenzione (cambio dell'olio)
2. Sistemi pneumatici: è il caso dell'O.W.C. dove l'energia del moto ondoso comprime una camera d'aria che va ad attivare una turbina Well. Questa turbina ad aria ha la particolarità di mantenere lo stesso senso di rotazione indipendentemente dalla direzione del flusso d'aria.

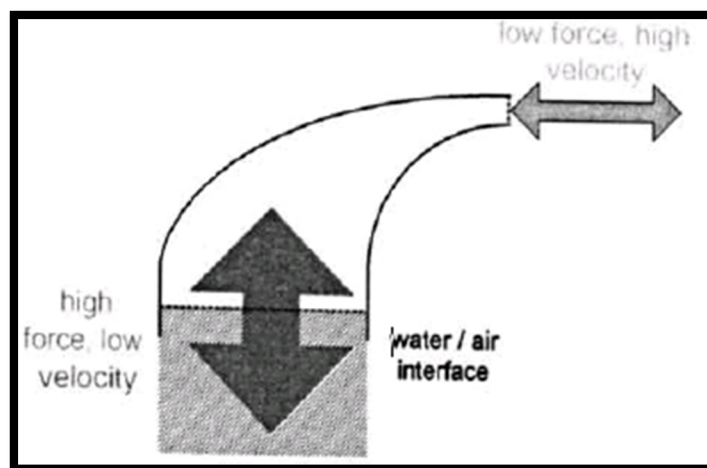


Figura 3.2-1: Sistema pneumatico presente in un O.W.C.

3. Sistema idraulico: questo sistema trasforma l'energia del moto ondoso, caratterizzato da bassa velocità e alta forza, in energia di pressione dell'olio. L'energia di pressione dell'olio è quindi trasformata attraverso un motore idraulico in energia meccanica rotante, il moto del rotore è ora caratterizzato da alta velocità e quindi facilmente accoppiabile con un generatore sincrono.

Con questo sistema si può collegare direttamente il generatore alla rete. Per regolare il flusso di potenza si va ad agire sul sistema idraulico.

³Come mostrato [Baker 03]

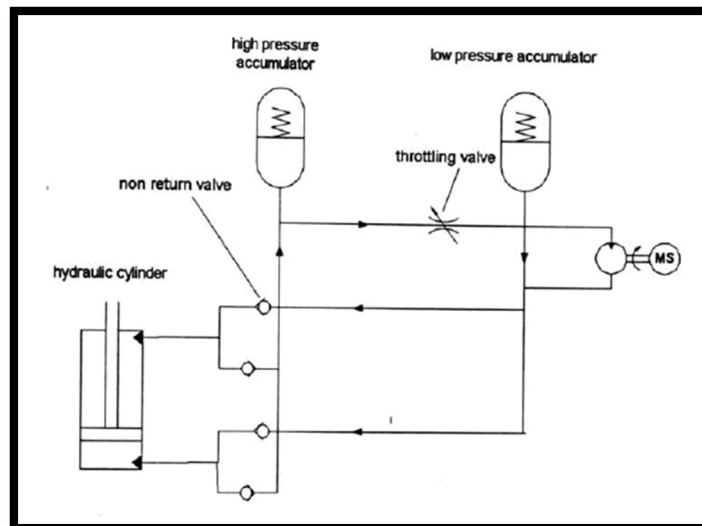


Figura 3.2-2:PTO idraulico

4. Conversione diretta (Direct Drive): in questo caso il dispositivo galleggiante è direttamente collegato alla macchina elettrica costituita da un generatore lineare. L'interfaccia del generatore con la rete avviene per mezzo di convertitori statici.

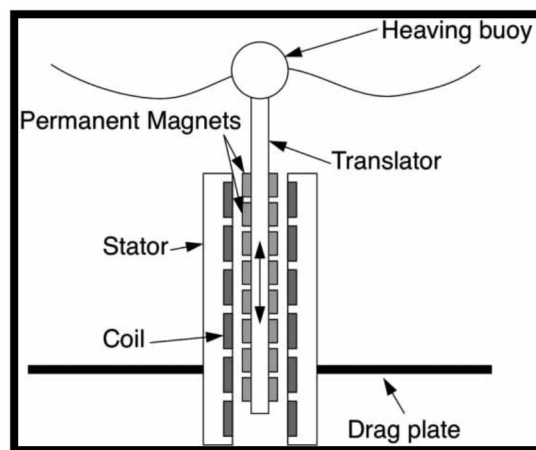


Figura 3.2-3: Direct drive WEC

In questo elaborato viene analizzato il caso di un point absorber che attraverso una conversione diretta aziona il relativo generatore elettrico lineare. Nei capitoli successivi verranno descritti i tipi di generatori lineari la loro modellizzazione ed il loro controllo.

4. Teoria lineare delle onde

4.1. Formazione del moto ondoso

Il moto ondoso è dovuto alla combinazione di tre fattori: il vento, la tensione superficiale e la gravità (non è considerato in questo documento il fenomeno delle maree).

L'energia è contenuta sia nelle particelle di fluido che si muovono superficialmente, sia in quelle che si muovono in profondità.

Come caratterizzazione della risorsa si usa in genere la potenza media per fronte d'onda che può essere determinata⁴:

$$P = \frac{\rho g^2 T H_s^2}{32\pi} \quad (4.11)$$

P = potenza media (W/m)

W = ampiezza d'onda (m)

T = periodo (sec)

ρ = densità 1025 Kg/m³

Hs = altezza d'onda significativa (m)

Un verosimile stato di mare è ad esempio caratterizzato da Hs=0.75m e T=6.5sec che applicando l'equazione sopra corrisponde ad una potenza di 3.5kW/m.

⁴ Come mostrato [Baker 03]

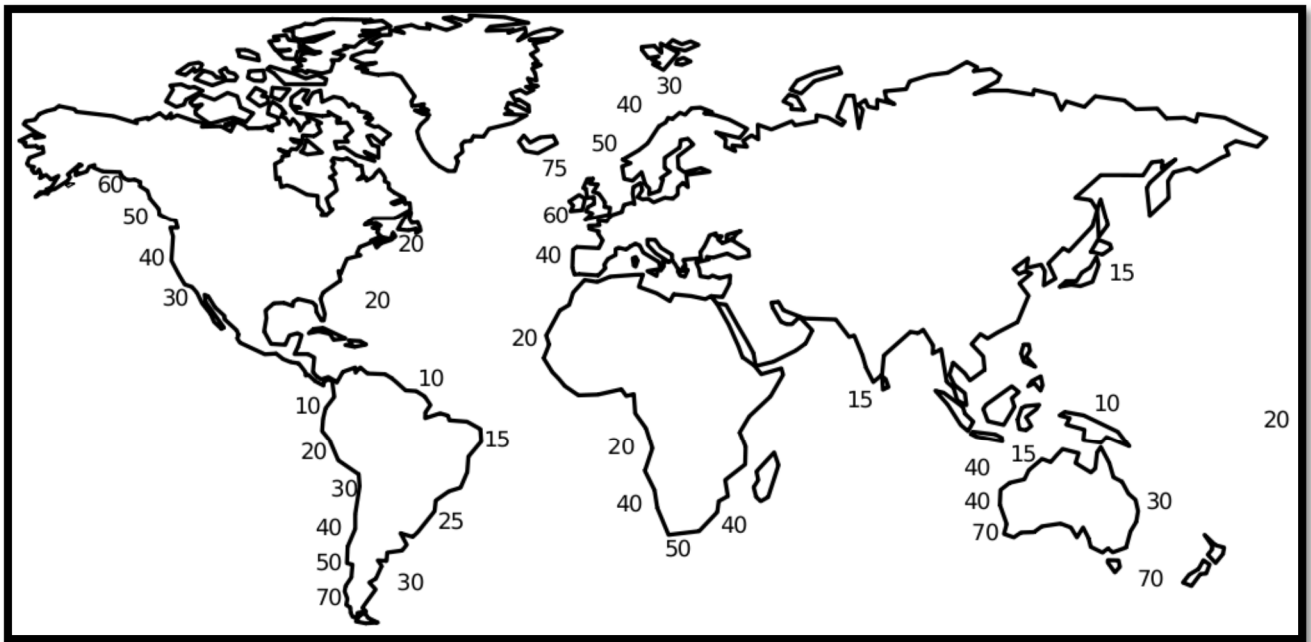


Figura 4.1-1 Potenza ondosa in kW/m in mare aperto per unità di fronte d'onda

In Figura 4.1-1 sono indicate le varie densità di potenza per metro di fronte d'onda nella varie aree del mondo. Complessivamente alcune stime forniscono valori di potenza contenuti nell'oceano nell'ordine di 2Tw. In questo capitolo si analizza la fisica del moto ondoso: una prima parte tratta la teoria lineare delle onde con un breve cenno alla teoria stocastica, mentre la seconda parte è dedicata alla interazione corpo-onda.

4.2. Onde regolari

Un'onda regolare è una funzione sinusoidale caratterizzata da una lunghezza d'onda (λ), da un periodo (T) e da un'ampiezza (a) del tipo⁵:

$$\eta(x, t) = a * \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (4.21)$$

Dove le varie grandezze sono visualizzate in Figura 4.2-1:

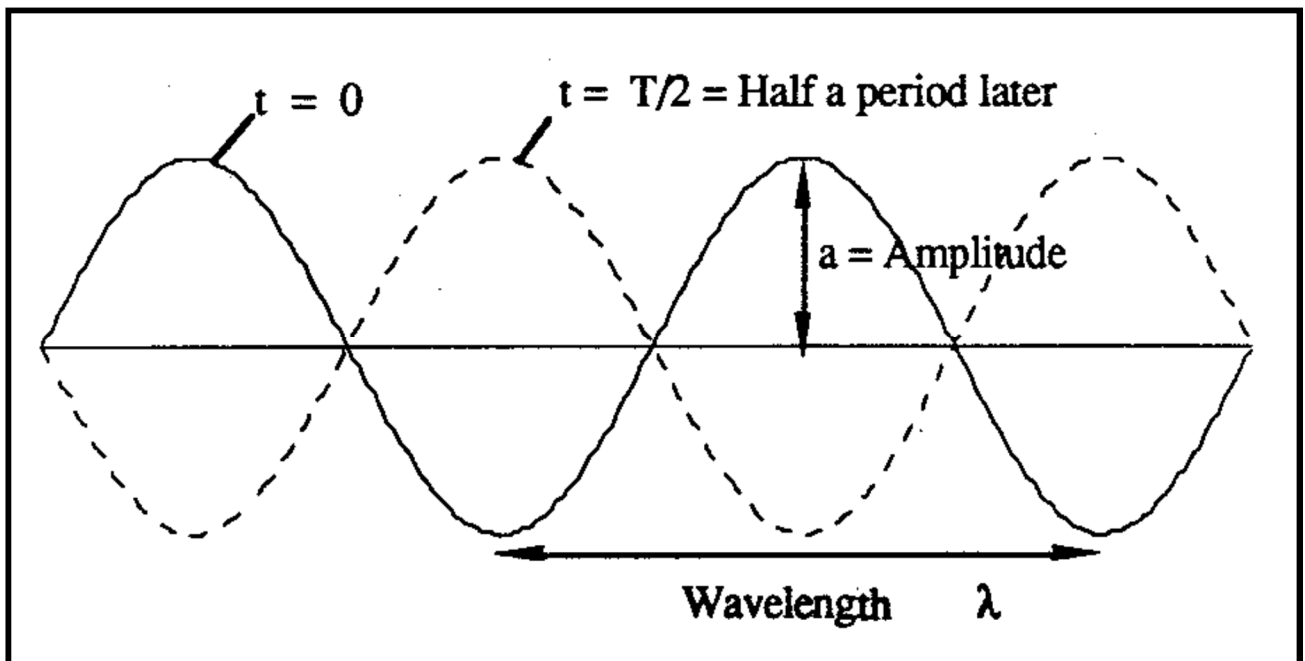


Figura 4.2-1 Rappresentazione dell'onda con identificazione dei parametri caratteristici

Si definisce celerità di fase dell'onda:

$$c_p = \frac{\lambda}{T} \quad (4.22)$$

⁵Come mostrato [H. E. Krogstad 00]

4.3. Impostazione del problema

La struttura di riferimento a cui si applica il problema è illustrata in Figura 4.3-1 , dove la funzione $\eta(z,t)$ rappresenta la superficie a pelo libero dell'acqua e h rappresenta la distanza tra il fondo e il valore medio di $\eta(z,t)$ ⁶.

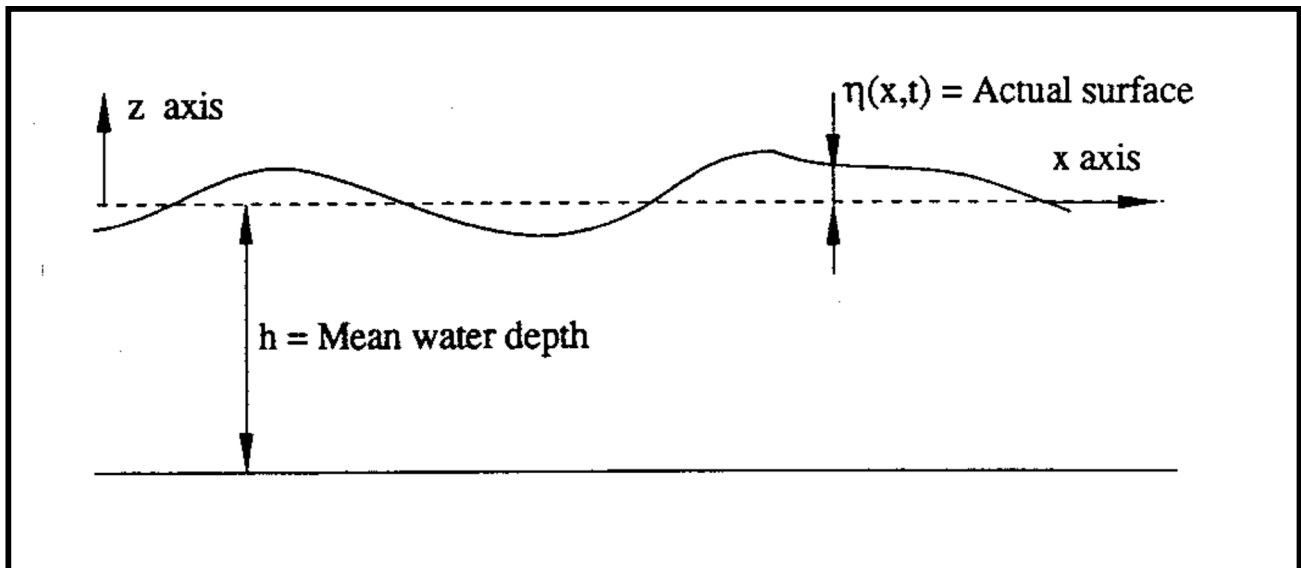


Figura 4.3-1: Rappresentazione dei parametri caratteristici del problema

Si fissa una base ortonormale di vettori (i,j,k) rispettivamente sovrapposti al sistema di riferimento (x,y,z) . La prima ipotesi che viene considerata è che il moto delle particelle del fluido si sviluppa esclusivamente sul piano x - z . Il vettore velocità perciò è funzione delle sole variabili x - z e la sua componente lungo il versore j è nulla:

$$\bar{v}(x, z, t) = \begin{Bmatrix} v_x(x, z, t) \\ 0 \\ v_z(x, z, t) \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Occorre subito fare una precisazione, gli approcci con cui si possono esprimere i problemi fluidodinamici sono due⁷:

1) Approccio Lagrangiano:

Questo tipo di approccio definisce una configurazione di partenza del fluido immaginato come un insieme di particelle.

⁶ Come mostrato [H. E. Krogstad 00]

⁷ Come mostrato [F. Ballio]

Ogni particella può quindi essere individuata da un vettore posizione:

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

L'evoluzione nel tempo di questa particella è descritta dal vettore traiettoria:

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}_0, t) = \begin{Bmatrix} x(\bar{\mathbf{x}}_0, t) \\ y(\bar{\mathbf{x}}_0, t) \\ z(\bar{\mathbf{x}}_0, t) \end{Bmatrix} \quad (4.3-3)$$

Questo descrive al variare del tempo la traiettoria di quel punto specifico individuato dalla posizione iniziale. Seguendo questo approccio la velocità è definita:

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}_0, t) = \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}_0, t) \quad (4.34)$$

2) Approccio Euleriano

Questo tipo di approccio è seguito quando si applicano teoremi "campistici" come nel caso da noi considerato.

Invece di considerare una specifica configurazione iniziale del sistema di particelle si fissano i punti dello spazio che lo racchiudono. Durante l'evoluzione del moto le varie particelle transiteranno per quei punti identificati dal vettore:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

indipendente dal tempo. Fissato un dato punto nello spazio, il vettore velocità nell'approccio euleriano, rappresenta l'evoluzione nel tempo dei vettori velocità lagrangiani associati alle particelle che nei vari istanti transitano nel punto (x,y,z) considerato.

Fissato un istante di tempo una, particella "lagrangiana" occuperà il punto "euleriano" quando:

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}_0, t) = \bar{\mathbf{x}} \quad (4.36)$$

Dove il membro di sinistra rappresenta il punto \mathbf{x}_0 che all'istante t si trova nella posizione identificata dal punto euleriano (membro di destra).

In quell'istante velocità lagrangiana e euleriana coincidono:

$$\bar{v}(\bar{x}_0, t) = \bar{v}_e(\bar{x}(\bar{x}_0, t), t) \quad (4.37)$$

Considerando quindi l'approccio euleriano andiamo a scrivere le equazioni del bilancio di massa che nell'ipotesi di fluido incomprimibile ($\rho=\text{cost}$) diventa:

$$\rho \bar{\nabla}^T \bar{v}(x, z, t) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.38)$$

Dove l'operatore nabla:

$$\bar{\nabla} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (4.39)$$

L'altra ipotesi è quella di fluido irrotazionale data dalla:

$$\bar{\nabla} \times \bar{v}(x, z, t) = \bar{0} \quad (4.310)$$

che, senza entrare nel dettaglio, si traduce nell'assenza di fenomeni vorticosi.

Questa ipotesi fa sì che il campo di velocità sia un campo conservativo, allora è possibile determinarne tutte le sue componenti, nota una funzione scalare detta potenziale di velocità $\phi(x, z, t)$ tramite:

$$\bar{v}(x, z, t) = \bar{\nabla} \Phi(x, z, t) \quad (4.311)$$

Combinando le relazioni (4.38) e (4.311) otteniamo l'equazione di Laplace:

$$\bar{\nabla}^T \bar{\nabla} \Phi(x, z, t) = \bar{\nabla}^2 \Phi(x, z, t) = 0 \quad (4.312)$$

Che in forma estesa diventa:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad \forall x \forall -h \leq z \leq \eta(x, t) \forall t \quad (4.313)$$

L'equazione sopra è quella principale del nostro problema a cui vanno aggiunte le varie condizioni al contorno.

1. Condizione cinematica sul fondale(Bottom Boundary Condition BBC):

Il fondale è per ipotesi impermeabile e per semplicità è considerato perfettamente piatto. Quest'ultima ipotesi appare molto forte rispetto alla realtà. Nulla vieta di scrivere la condizione riferendosi alla generica normale della superficie del fondale, ma in seguito si studierà principalmente il moto in acque profonde. Sotto quest'ultima ipotesi la profondità diventa idealmente infinita e la geometria effettiva del fondale risulta trascurabile. In termini analitici questo si traduce:

$$v_z(x, z, t) \Big|_{\begin{Bmatrix} x \\ -h \\ t \end{Bmatrix}} = \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{\begin{Bmatrix} x \\ -h \\ t \end{Bmatrix}} = 0 \quad \forall x, t \quad (4.314)$$

2. Vincolo cinematico sulla superficie libera (Kinematic Boundary Condition KBC):

Si osserva che nell'evoluzione nel tempo del moto ondoso le particelle che appartengono alla superficie libera pur cambiando posizione continuano ad appartenere a tale superficie. Questa osservazione si traduce in termini analitici:

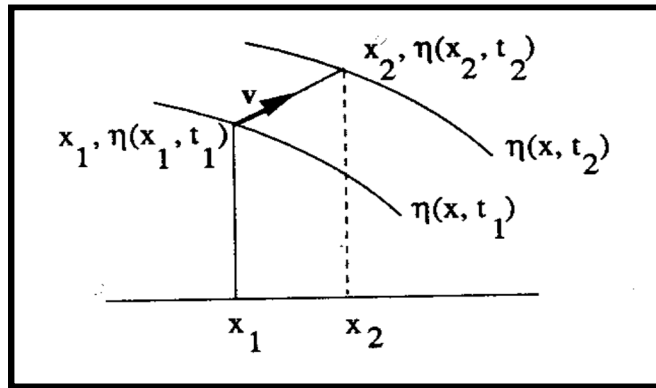


Figura 4.3-2: Rappresentazione delle grandezze che caratterizzano le KBC

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + v_x(x_1, z_1, t_1)(t_2 - t_1) \\ \eta(x_2, t_2) = \eta(x_1, t_1) + v_z(x_1, z_1, t_1)(t_2 - t_1) \end{cases} \quad (4.315)$$

Dove si considera lo spostamento del generico punto (x_1, z_1, t_1) che nel tempo t_2 va ad assumere la posizione x_2, z_2 .

La funzione $\eta(x_2, t_2)$ può essere scritta come sviluppo in serie di Taylor della funzione $\eta(x, t)$ calcolata però nel punto x_1, z_1 (essendo x_2, z_2 un punto "vicino" a x_1, z_1):

$$\eta(x_2, t_2) = \eta(x_1, t_2) + \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \Big|_{\begin{Bmatrix} x_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}} (x_2 - x_1) + \sigma(x_2, t_2) \quad (4.3-16)$$

Sostituendo la (4.316) nella seconda equazione della (4.315) e dividendo per $\Delta t = t_2 - t_1$ otteniamo:

$$\frac{\eta(x_1, t_1 + \Delta t) - \eta(x_1, t_1)}{\Delta t} + \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \Big|_{\{x_1\}_{t_1 + \Delta t}} \frac{(x_2 - x_1)}{\Delta t} = v_z(x_1, z_1, t_1) - \frac{\sigma(x_2, t_2)}{\Delta t} \quad (4.3-17)$$

Ora sostituiamo alla differenza $(x_2 - x_1)$ il valore imposto dalla prima equazione della (4.315) otteniamo:

$$\frac{\eta(x_1, t_1 + \Delta t) - \eta(x_1, t_1)}{\Delta t} + \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \Big|_{\{x_1\}_{t_1 + \Delta t}} v_x(x_1, z_1, t_1 + \Delta t) = v_z(x_1, z_1, t_1) - \frac{\sigma(x_2, t_2)}{\Delta t} \quad (4.3-18)$$

Se ora facciamo il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ il primo termine diventa una derivata, i termini che completano il polinomio di Taylor contengono al loro interno le potenze della differenza $(x_2 - x_1)$. Questi ultimi termini proporzionali alle potenze di Δt si annullano nell'operazione di limite. Generalizzando per i punti appartenenti alla superficie libera otteniamo:

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + v_x(x, z, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = v_z(x, z, t) \quad \forall x, z, t \text{ t.c. } z = \eta(x, t) \quad (4.319)$$

3. Condizioni dinamiche sulla superficie libera (Dynamic Boundary Condition: DBC)

Si tratta di scrivere l'equazione di Bernoulli imponendo la pressione atmosferica sulla superficie libera, tale equazione per un fluido irrotazionale può essere scritta come:

$$\frac{p(x, z, t)}{\rho} + \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(v_x^2(x, z, t) - v_z^2(x, z, t) \right) + gz = c(t) \quad (4.3-20)$$

Dove la funzione $c(t)$ può essere scelta ad arbitrio e noi la sceglieremo pari ad $c(t) = p_{atm}/\rho$ e quindi per i punti che appartengono alla superficie libera:

$$\frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(v_x^2(x, z, t) - v_z^2(x, z, t) \right) + gz = 0 \quad \forall x, z, t \text{ t.c. } z = \eta(x, t) \quad (4.3-21)$$

Il problema può quindi essere così riepilogato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad \forall x \forall -h \leq z \leq \eta(x, t) \quad \forall t \\ v_z(x, z, t) \Big|_{\left\{ \begin{smallmatrix} x \\ -h \\ t \end{smallmatrix} \right\}} = \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{\left\{ \begin{smallmatrix} x \\ -h \\ t \end{smallmatrix} \right\}} = 0 \quad \forall x, t \\ \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + v_x(x, z, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = v_z(x, z, t) \quad \forall x, z, t \text{ t.c. } z = \eta(x, t) \\ \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(v_x^2(x, z, t) - v_z^2(x, z, t) \right) + gz = 0 \quad \forall x, z, t \text{ t.c. } z = \eta(x, t) \end{array} \right. \quad (4.322)$$

4.4. Teoria linearizzata per onde di piccola ampiezza

Il problema formulato in (4.322) è ancora troppo complesso per essere risolto analiticamente ed è quindi necessario introdurre ulteriori ipotesi⁸. In particolare se ci interessiamo al caso in cui la ampiezza delle onde è piccola rispetto alla loro lunghezza d'onda (come ordine di grandezza per le onde oceaniche abbiamo $L = 100\text{m}$ $T=8\text{sec}$), possiamo dimostrare che il problema può essere linearizzato e diviene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad \forall -h \leq z \leq \eta(x, t) \quad \forall t \\ v_z(x, z, t) \Big|_{\substack{x \\ -h \\ t}} = \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{\substack{x \\ -h \\ t}} = 0 \quad \forall x, t \\ \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = v_z(x, 0, t) \quad \forall x, t \\ \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial t} \Big|_{\substack{x \\ 0 \\ t}} = -g\eta(x, t) \quad \forall x, t \end{array} \right. \quad (4.41)$$

Verifichiamo ora che la seguente funzione è soluzione del problema:

$$\phi(x, z, t) = A(z) \text{sen}(\omega t - kx + \varphi) \quad (4.42)$$

Da prima calcoliamo i termini interni all'equazione di Laplace:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial x^2} = -k^2 A(z) \text{sen}(\omega t - kx + \varphi) \\ \frac{\partial^2 \phi(x, z, t)}{\partial z^2} = \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \text{sen}(\omega t - kx + \varphi) \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Che sostituendo nella prima equazione di (4.322) ci fornisce:

$$\left(-k^2 A(z) + \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \right) \text{sen}(\omega t - kx + \varphi) = 0 \quad \forall x, t, z \in [-h, \eta] \quad (4.4-4)$$

E' evidente che l'unico modo per verificare l'equazione consiste nell'annullare il termine tra parentesi:

$$\left(-k^2 A(z) + \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \right) = 0 \quad \forall z \in [-h, \eta] \quad (4.45)$$

⁸ Come mostrato in [H. E. Krogstad 00]

L'equazione differenziale ha come soluzione:

$$A(z) = c_1 \cosh(kz + c_2) \quad (4.46)$$

Sostituendo ora la funzione più esplicita del potenziale nella seconda equazione del problema (4.41), si ottiene:

$$\left. \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial z} \right|_{\begin{Bmatrix} x \\ -h \\ t \end{Bmatrix}} = \left. \frac{\partial (c_1 \cosh(kz + c_2) \sin(\omega t - kx + \varphi))}{\partial z} \right|_{\begin{Bmatrix} x \\ -h \\ t \end{Bmatrix}} \quad (4.47)$$

Da cui:

$$kc_1 \sin(\omega t - kx + \varphi) \sinh(-kh + c_2) = 0 \quad \forall x, t \quad (4.48)$$

Quindi, posto $c_2 = kh$ abbiamo una espressione del potenziale che verifica i primi due vincoli.

Sviluppando ora le ultime due equazioni di (4.41):

$$\eta(x, t) = \left. \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} \right|_{\begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ t \end{Bmatrix}} = -\frac{\omega^2 c_1}{g} \cos(\omega t - kx + \varphi) \cosh(kh) \quad (4.4-9)$$

Da cui:

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \frac{\omega^2 c_1}{g} \sin(\omega t - kx + \varphi) \cosh(kh) \quad (4.410)$$

Invece:

$$v_z(x, 0, t) = \left. \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial z} \right|_{\begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ t \end{Bmatrix}} = kc_1 \sinh(kh) \sin(\omega t - kx + \varphi) \quad (4.4-11)$$

L'uguaglianza delle ultime due equazioni, cioè il soddisfacimento del terzo vincolo del problema linearizzato fornisce la cosiddetta equazione di dispersione:

$$\omega^2 = gk * \tanh(kh) \quad (4.412)$$

Questa importante relazione mostra come il numero d'onda k , la profondità h e la pulsazione w non sono grandezze tra loro indipendenti. Per un dato numero d'onda sono possibili solo due valori di w dati dalle radici dell'equazione sopra.

Riscrivendo i risultati e scegliendo ad esempio $f = \pi/2$, questo angolo dipenderà dalla posizione del sistema di riferimento oceanico, in generale è trattato come una variabile aleatoria.

Le relazioni per questo caso specifico diventano:

$$\begin{cases} \phi(x, z, t) = c_1 \cosh(k(z + h)) \cos(\omega t - kx) \\ \eta(x, t) = -\frac{\omega c_1}{g} \sin(\omega t - kx) \cosh(kh) \\ \omega^2 = gk * \tanh(kh) \end{cases} \quad (4.413)$$

Ponendo:

$$a = -\frac{\omega c_1}{g} \cosh(kh) \quad (4.414)$$

Che rappresenta una costante fissata c_1 e il numero d'onda, questo significa che la superficie libera può essere scritta:

$$\eta(x, t) = a \sin(\omega t - kx) \quad (4.415)$$

In cui riconosciamo un'onda regolare che propaga lungo la direzione x , in cui il parametro a ne definisce l'ampiezza. Quindi possiamo riscrivere il sistema (4.413) nella forma finale:

$$\begin{cases} \phi(x, z, t) = \frac{ag}{\omega \cosh(kh)} \cosh(k(z + h)) \cos(\omega t - kx) \\ \eta(x, t) = a \sin(\omega t - kx) \\ \omega^2 = gk * \tanh(kh) \end{cases} \quad (4.416)$$

4.5. Proprietà delle onde:

In questo paragrafo si evidenziano le principali proprietà che si possono ricavare elaborando i risultati ottenuti nel paragrafo precedente⁹.

Le prime osservazioni che vengono fatte riguardano la relazione di dispersione, come già detto fissato il numero d'onda sono solo due le pulsazioni possibili:

$$\omega = \pm \sqrt{gk * tgh(kh)} \quad (4.51)$$

Riferendosi ad un'onda regolare i valori di k e ω sono:

$$\begin{cases} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{cases} \quad (4.52)$$

E' possibile introdurre le seguenti ipotesi:

-) Acque basse $h/\lambda \ll 1$ (limite operativo $h/\lambda < 1/20$) da cui:

$$\omega = \lim_{kh \rightarrow 0} \sqrt{gk * tgh(kh)} = k\sqrt{gh} \quad (4.53)$$

-) Acque profonde $h/\lambda \gg 1$ (limite operativo $h/\lambda > 1/2$) da cui:

$$\omega = \lim_{kh \rightarrow \infty} \sqrt{gk * tgh(kh)} = \sqrt{gk} \quad (4.54)$$

La velocità di fase sarà quindi:

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{g}{\omega} tgh(kh) \quad (4.55)$$

Che nel caso di acque profonde vale:

$$c_p = \frac{g}{\sqrt{gk}} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (4.56)$$

⁹ Come mostrato in [H. E. Krogstad 00]

L'andamento della celerità di fase in funzione della lunghezza d'onda è mostrato nella figura seguente:

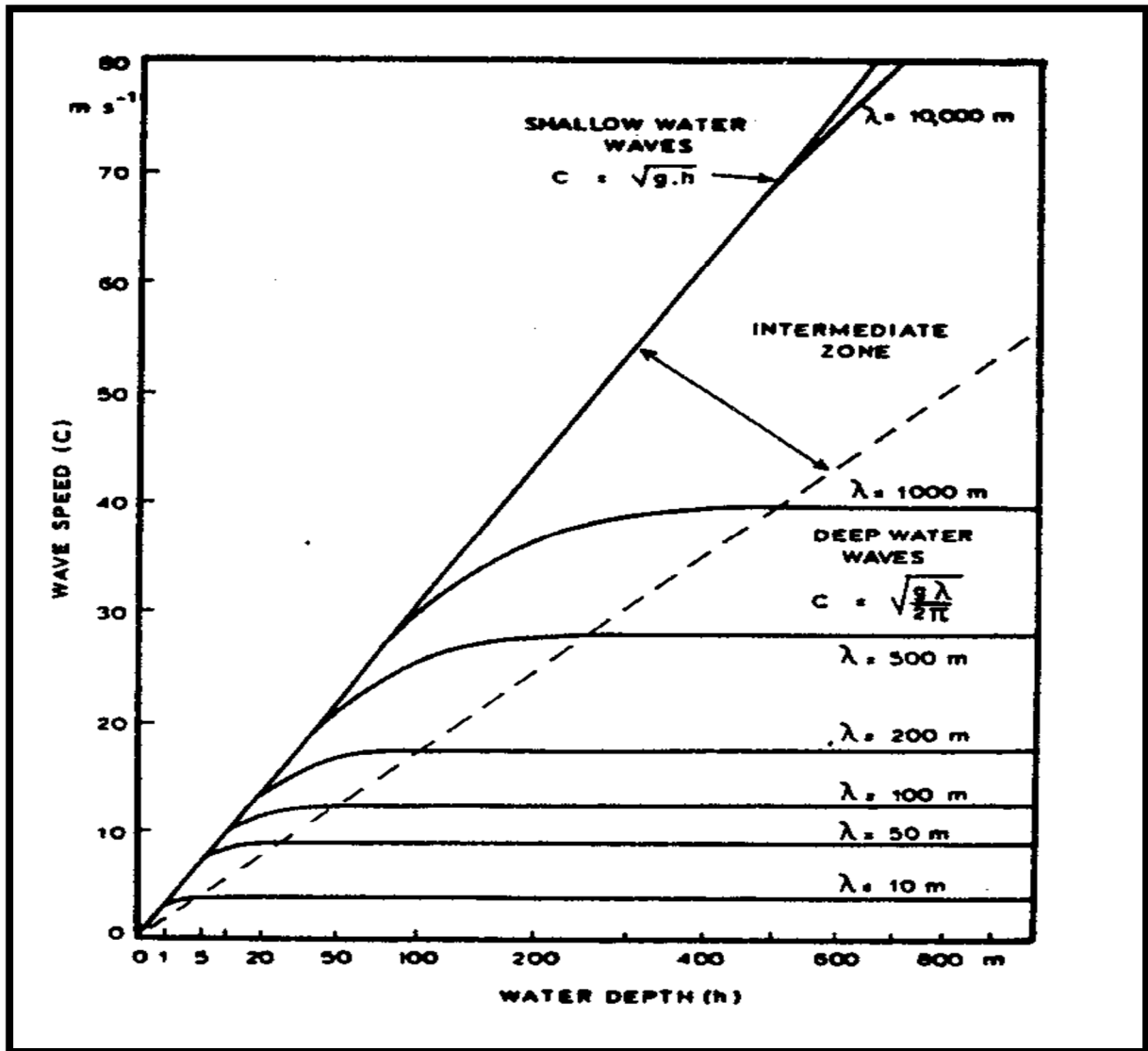


Figura 4.5-1: Andamento della celerità di fase in funzione della profondità e della lunghezza d'onda

Il potenziale di velocità in acque profonde vale:

$$\phi(x, z, t) = \lim_{kh \rightarrow \infty} \frac{ag}{\omega \cosh(kh)} \cosh(k(z + h)) \cos(\omega t - kx) = \frac{ag}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx) \quad (4.5-7)$$

Le componenti x e z di velocità possono quindi essere calcolate mediante un'operazione di gradiente e ricordando la relazione di dispersione in acque profonde:

$$\begin{Bmatrix} v_x(x, z, t) \\ v_z(x, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega a e^{kz} \sin(\omega t - kx) \\ \omega a e^{kz} \cos(\omega t - kx) \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

Dalla quale è possibile osservare come le componenti di velocità fissata una determinata aliquota di profondità sono composte da onde regolari di medesima ampiezza.

Nel caso generale di qualsiasi tipo di profondità la soluzione è:

$$\begin{Bmatrix} v_x(x, z, t) \\ v_z(x, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\omega^2 \frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \\ -a\omega^2 \frac{\sinh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

Fissato un punto (x_p, z_p) , il valore della velocità è il valore che possiedono le particelle di fluido negli istanti di tempo in cui si trovano nella posizione identificata dal punto stesso.

Prendendo un punto di coordinate $P = (x_p, z_p)$, la velocità di un punto $(P' = (x'_p, z'_p))$ in un intorno di P può essere calcolata mediante l'espansione in forma di Taylor:

$$\bar{v}(x'_p, z'_p, t) = \bar{v}(x_p, z_p, t) + \left. \frac{\partial \bar{v}(x, z, t)}{\partial x} \right|_{\substack{x_p \\ z_p \\ t}} dx + \left. \frac{\partial \bar{v}(x, z, t)}{\partial z} \right|_{\substack{x_p \\ z_p \\ t}} dz + \sigma(x'_p, z'_p, t) \quad (4.5-10)$$

Assumendo che il punto P' sia distante da P con un ordine di grandezza pari alla lunghezza d'onda si può osservare che, sviluppando il polinomio, i termini derivativi sono trascurabili per cui:

$$\bar{v}(x'_p, z'_p, t) \cong \bar{v}(x_p, z_p, t) \quad (4.511)$$

Quindi è possibile determinare un intorno del punto P in cui la velocità "euleriana" è variabile solo con il tempo. Questo vuol dire che in questo intorno velocità "euleriana" e "lagrangiana" coincidono. Se ad esempio prendiamo il punto P_0 appartenente all'interno di P come particella della configurazione iniziale, cioè all'istante t_0 il vettore posizione assume:

$$\bar{x}(t_0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0 = \begin{Bmatrix} x_{p0} \\ z_{p0} \end{Bmatrix} \quad (4.512)$$

La traiettoria che segue sarà:

$$\bar{x}(t, \bar{x}_0) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{v}(x_p, z_p, t) dt = \bar{x}_0 + \begin{Bmatrix} \frac{A}{\omega} (\sin(\omega t - kx_p) - \sin(\omega t_0 - kx_p)) \\ -\frac{B}{\omega} (\cos(\omega t - kx_p) - \cos(\omega t_0 - kx_p)) \end{Bmatrix} \quad (4.513)$$

Dove:

$$\begin{cases} A = a\omega^2 \frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \\ B = -a\omega^2 \frac{\sinh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) \end{cases} \quad (4.514)$$

Andando a scomporre i termini dell'equazione (4.513) si osserva che essa è composta da due vettori costanti con il tempo e da un vettore le cui componenti nel tempo descrivono un ellisse:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{c}} \triangleq \begin{pmatrix} -\frac{A}{\omega} \sin(\omega t_0 - kx_p) \\ \frac{B}{\omega} \cos(\omega t_0 - kx_p) \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{r}}(t) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{A}{\omega} \sin(\omega t - kx_p) \\ -\frac{B}{\omega} \cos(\omega t - kx_p) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.515)$$

Dove le componenti dell'ultimo vettore verificano l'equazione dell'ellisse scritta come:

$$\frac{r_x(t)^2}{\left(\frac{A}{\omega}\right)^2} + \frac{r_z(t)^2}{\left(\frac{B}{\omega}\right)^2} = 1 \quad (4.516)$$

Le grandezze vettoriali descritte sono rappresentate in Figura 4.5-2:

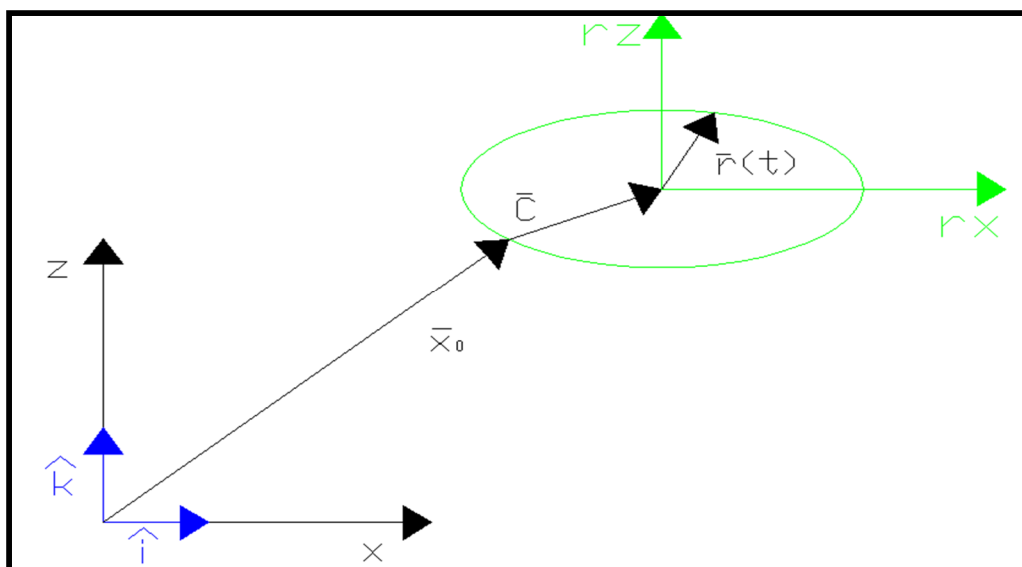


Figura 4.5-2: Rappresentazione delle grandezze vettoriali

Se prendiamo il caso in cui il fondale è profondo l'ellisse diventa un cerchio:

$$A = B = \omega a e^{kz} \quad (4.517)$$

La Figura 4.5-3 mostra l'andamento calcolato.

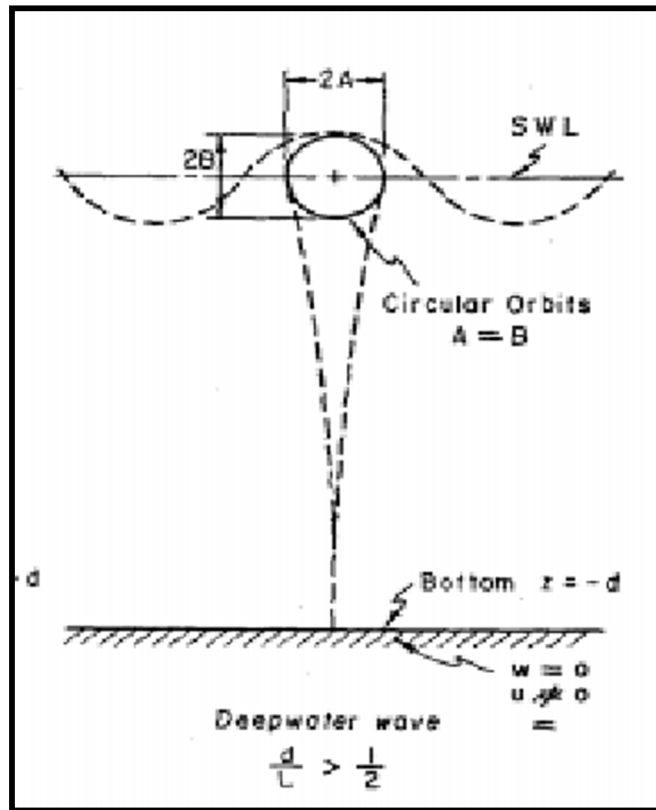


Figura 4.5-3: Orbite seguite dalle particelle in acque profonde

Un'altra grandezza che è possibile ricavare è l'andamento della pressione utilizzando il teorema di Bernoulli sotto le ipotesi di fluido irrotazionale e con onde di piccola ampiezza:

$$p(x, z, t) = p_{atm} - \rho \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial t} - \rho g z \quad (4.518)$$

Da cui:

$$p(x, z, t) = p_{atm} - \rho a g \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \sin(\omega t - kx) - \rho g z \quad (4.5-19)$$

4.6. Onde piane

Questo paragrafo generalizza le equazioni viste fino ad adesso per un'onda piana che si propaga in una determinata direzione¹⁰. Questo sviluppo analitico può essere utile in alcuni contesti.

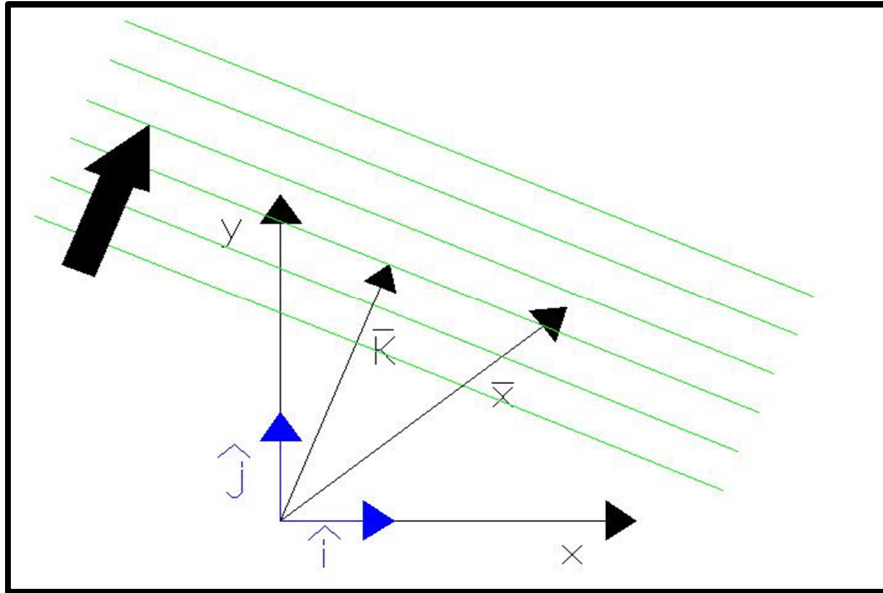


Figura 4.6-1 Sistema di riferimento per onde piane

Supponiamo di avere un sistema di riferimento come mostrato in Figura 4.6-1, possiamo definire:

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

Che rappresenta un vettore la cui norma è il numero d'onda e la sua direzione rappresenta la direzione di propagazione dell'onda piana. Introducendo il vettore posizione x si può scrivere:

$$\eta(\bar{x}, t) = a \operatorname{sen}(\omega t - \bar{k}^T \bar{x} + \alpha) \quad (4.62)$$

Se poniamo:

$$\bar{k} = k\hat{k} \quad (4.63)$$

Ed:

$$\bar{x} = r\hat{k} + \bar{b} \quad (4.64)$$

¹⁰ Come mostrato in [H. E. Krogstad 00]

Dove il vettore posizione è stato scomposto in una componente parallela al versore del numero d'onda e una componente ortogonale, sostituendo dentro la (4.62) otteniamo:

$$\eta(\bar{x}, t) = \text{asen}(\omega t - kr\hat{k}^T\hat{k} - k\hat{k}^T\bar{b} + \alpha) = \text{asen}(\omega t - kr + \alpha) \quad (4.6-5)$$

4.7. Energia e potenza

Data un'onda piana regolare che propaga nella direzione x , verrà calcolata l'energia che possiede per unità di fronte d'onda¹¹.

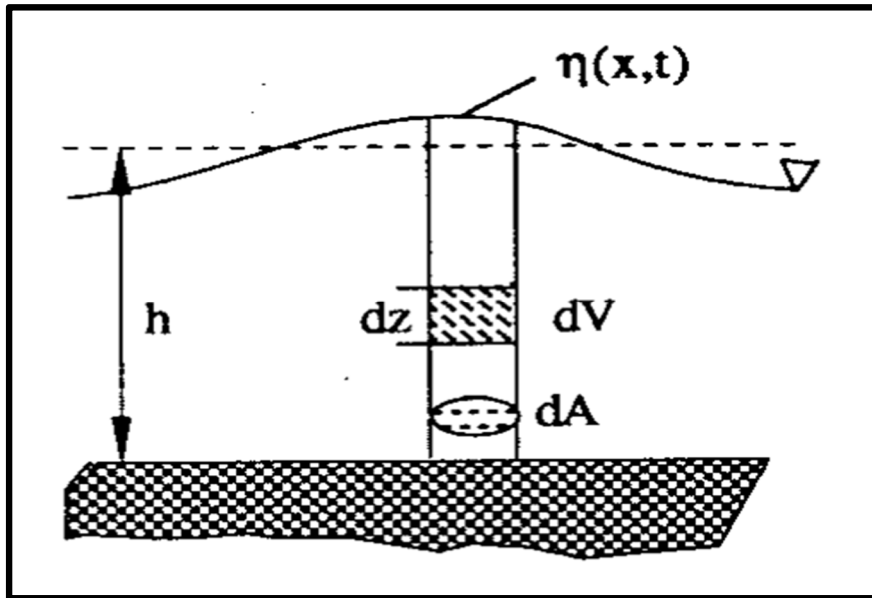


Figura 4.7-1: Elemento infinitesimo appartenente alla colonna d'acqua

L'energia potenziale che possiede un elemento infinitesimo caratterizzato da un volume dV alla profondità z vale:

$$d\tilde{E} = \rho g z dV \quad (4.71)$$

Dove, implicitamente, avendo fissato il riferimento di z sul livello medio della superficie libera l'energia potenziale è la differenza tra l'energia potenziale di un volume posto all'altezza z e l'energia potenziale al livello $z=0$.

Quindi l'energia potenziale della colonna d'acqua vale:

$$dE(x, t) = dA \int_{-h}^{\eta(x,t)} \rho g z dz = \rho g dA \frac{1}{2} (\eta(x, t)^2 - h^2) \quad (4.72)$$

Se voglio ottenere l'energia per unità di lunghezza basta dividere per dA , inoltre se sono interessato all'eccesso di energia potenziale rispetto alla linea media di superficie:

¹¹ Come mostrato in [H. E. Krogstad 00]

$$dE'(x, t) = -\rho g dA \frac{1}{2} h^2 \quad (4.73)$$

Da cui:

$$\frac{dEp(x, t)}{dA} = \frac{dE(x, t) - dE'(x, t)}{dA} = \rho g \frac{1}{2} \eta(x, t)^2 \quad (4.74)$$

È possibile scrivere il valore medio dell'energia potenziale che diventa proporzionale al valore medio della superficie libera:

$$\left\langle \frac{dEp(x, t)}{dA} \right\rangle = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (a \sin(\omega t - kx))^2 dx = \frac{1}{2} \rho g \frac{a^2}{2} \quad (4.7-5)$$

L'energia cinetica invece:

$$dEc(x, t) = \int_{-h}^{\eta(x, t)} \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}(x, z, t)\|^2 dAdz \quad (4.76)$$

Concentrandosi sul solo caso di acque profonde e ricordando la (3.54):

$$dEc(x, t) = \int_{-\infty}^{\eta(x, t)} \frac{1}{2} \rho (\omega a e^{kz})^2 dAdz \cong \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \rho (\omega a e^{kz})^2 dAdz = \rho g \frac{a^2}{4} \quad (4.7-7)$$

Il valore medio essendo una costante sarà lo stesso valore, quindi possiamo concludere che in media metà energia trasportata dall'onda è energia cinetica e metà è energia potenziale.

$$\left\langle \frac{dEp(x, t)}{dA} \right\rangle + \left\langle \frac{dEc(x, t)}{dA} \right\rangle = \rho g \frac{a^2}{2} \quad (4.78)$$

4.8. La random linear wave theory

Come visto fino ad ora, una soluzione del problema linearizzato sotto l'ipotesi di piccola ampiezza è costituito da un'onda piana regolare caratterizzata da ampiezza, numero d'onda e frequenza, queste ultime collegate tra loro dalla relazione di dispersione.

Essendo il problema lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti quindi è possibile immaginare la superficie libera dell'oceano come composta da una somma di un certo numero di onde piane regolari ognuna delle quali singolarmente verifica il problema precedentemente descritto¹². In termini analitici:

$$\eta(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(\omega_n t - \bar{k}_n^T \bar{x} + \phi_n) \quad (4.81)$$

Dove:

$$\omega_n = \pm \sqrt{g \|\bar{k}_n\| * \tanh(\|\bar{k}_n\| h)} \quad \forall n \in [1, 2 \dots N] \quad (4.82)$$

Le variabili a_n, ω_n, k_n sono indipendenti dalla posizione del sistema di riferimento in cui si decide di impostare il problema. La variabile ϕ_n invece dipende dalla scelta dell'origine degli assi. Ovviamente è impossibile scegliere un unico riferimento nell'oceano e quindi la fase viene considerata una variabile aleatoria che varia tra $[0; 2\pi]$.

Ponendo:

$$\phi_{0n} = \omega_n t - \bar{k}_n^T \bar{x} \quad (4.83)$$

E richiamando le principali grandezze delle variabili aleatorie:

Ricordando che per una variabile aleatoria si definiscono valore medio e varianza:

$$\begin{cases} E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x dx \\ Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \end{cases} \quad (4.84)$$

Dove con X identifico una variabile aleatoria continua e con f_X la sua densità di probabilità. Inoltre vale che:

¹² Come mostrato in [H. E. Krogstad 00]

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)g(x)dx \quad (4.85)$$

Nel nostro caso la variabile aleatoria è la fase, che ha una funzione densità di probabilità del tipo mostrato in Figura 4.8-1:

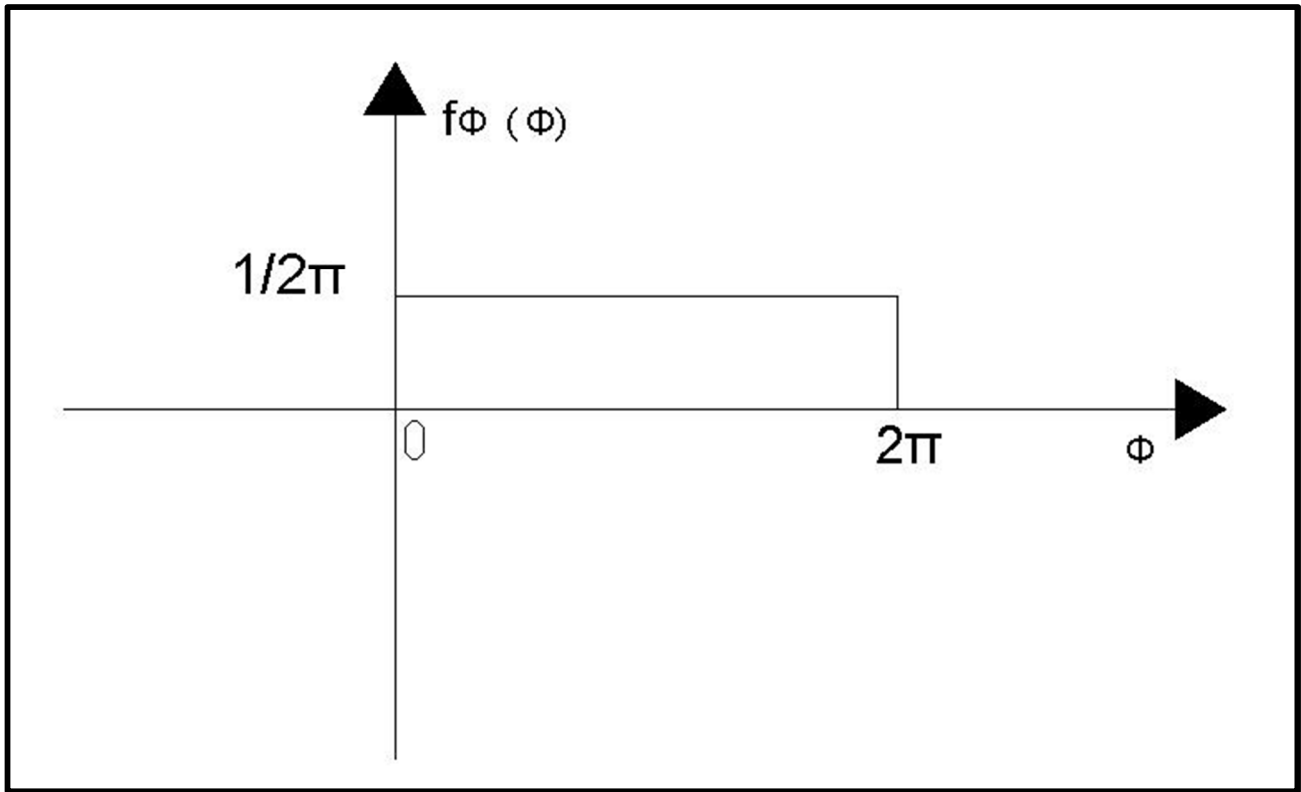


Figura 4.8-1: Densità di probabilità della fase

Dove occorre notare l'area unitaria come deve essere per una funzione densità di probabilità, perciò il valore medio della funzione:

$$E[\text{sen}(\phi_0 + \Phi)] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \text{sen}(\phi_0 + \Phi) d\Phi = 0 \quad (4.86)$$

Mentre la varianza:

$$\text{Var}[\text{sen}(\phi_0 + \Phi)] = E[(\text{sen}(\phi_0 + \Phi) - 0)^2] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \text{sen}^2(\phi_0 + \Phi) d\Phi = \frac{1}{2} \quad (4.8-7)$$

Sfruttando la proprietà di linearità del valore medio:

$$E[\eta(\bar{x}, t)] = \sum_{n=1}^N a_n E[\text{sen}(\phi_{0n} + \Phi)] = 0 \quad (4.88)$$

E la varianza:

$$Var[\eta(\bar{x}, t)] = \sum_{n=1}^N a_n^2 E[(sen(\phi_{0n} + \Phi))^2 - 0] = \sum_{n=1}^N a_n^2 \frac{1}{2} \quad (4.8-9)$$

Se ora si considera la superficie oceanica costituita dalla sovrapposizione di infinite onde regolari ognuna caratterizzata da un determinato numero d'onda alla quale corrisponde una certa ampiezza è possibile sostituire la sommatoria con un integrale:

$$\sum_{n=1}^N a_n(\bar{k}_n^2) \frac{1}{2} \rightarrow \iint_{\bar{k}=-\infty}^{\bar{k}=\infty} \psi(\bar{k}) d\bar{k} \quad (4.810)$$

Da cui:

$$Var[\eta(\bar{x}, t)] = \iint_{\bar{k} \rightarrow -\infty}^{\bar{k}=\infty} \psi(\bar{k}) dk_x dk_y \quad (4.811)$$

Dove gli estremi di integrazione indicano che entrambe le componenti del vettore rappresentativo il numero d'onda devono tendere all'infinito.

La funzione $\Psi(k)$ è chiamata **wavenumber spectrum**, esprimendo il vettore numero d'onda in coordinate polari si ha:

$$\bar{k} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \cos \theta \\ k \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (4.812)$$

Quindi l'elemento:

$$dk_x dk_y = k d\theta dk \quad (4.813)$$

Ottenendo:

$$Var[\eta(\bar{x}, t)] = \iint_{k=0, \theta=0}^{k=\infty, \theta=2\pi} \psi(k, \theta) dk d\theta \quad (4.814)$$

Ponendo l'equazione sopra in funzione della pulsazione, cioè sostituendo al numero d'onda l'espressione ottenuta dalla relazione di dispersione:

$$Var[\eta(\bar{x}, t)] = \iint_{k=0, \theta=0}^{k=\infty, \theta=2\pi} \psi(k(\omega, \theta)k(\omega)) \frac{dk(\omega)}{d\omega} dk d\omega \quad (4.815)$$

Dove la quantità:

$$E(k(\omega), \vartheta) = \psi(k(\omega, \theta)k(\omega)) \frac{dk(\omega)}{d\omega} dk d\omega \quad (4.816)$$

È chiamata **directional wave spectrum**. Questa funzione si trova spesso scritta come:

$$E(k(\omega), \vartheta) = S(\omega) D(\omega, \vartheta) \quad (4.817)$$

Dove la funzione di destra è normalizzata come:

$$D(\omega, \vartheta) = \int_0^{2\pi} D(\omega, \vartheta) d\theta = 1 \quad \forall \omega \geq 0 \quad (4.818)$$

L'altra parte è chiamata **frequency spectrum**, in genere è scritta nel dominio della frequenza. Per poter garantire l'uguaglianza:

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(f) df = \int_0^{2\pi} S(\omega) d\omega \quad (4.819)$$

E quindi:

$$\tilde{S}(f) = 2\pi S(\omega) \quad (4.820)$$

Per analogia con i processi stocastici lo spectrum è anche noto come la trasformata di Fourier del coefficiente di correlazione. Quindi lo spectrum potrà essere derivato conoscendo la funzione di correlazione della superficie oceanica ed assumendo valida la teoria lineare delle onde.

4.9. Sea-state e parametri ingegneristici

Il sea-state è la condizione della superficie oceanica considerata come un campo stocastico caratterizzato dallo wave-spectrum¹³.

Ci sono alcuni parametri che sono molto utilizzati per caratterizzare un moto ondoso:

1. Spectral Moment:

$$m_k = \int_0^{\infty} f \tilde{S}(f) df \quad k = 0, 1, 2 \dots \dots \quad (4.91)$$

2. Altezza d'onda significativa:

$$H_{m0} = 4\sqrt{m_0} \quad (4.92)$$

3. Peak wave frequency: (f_p)

$$S(f_p) = \max(S(f)) \quad (4.93)$$

4. Peak period:

$$T_p = \frac{1}{f_p} \quad (4.94)$$

5. Periodo d'onda medio:

$$T_{m02} = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} \tilde{S}(f) df}{\int_0^{\infty} f^2 \tilde{S}(f) df}} \quad (4.95)$$

Lo wave spectrum per un determinato sea-state può essere determinato mediante misuratori delle variazioni d'onda. Determinate funzioni semi-empiriche forniscono lo wave-spectrum in funzione dei parametri ingegneristici definiti sopra, le più famose sono ad esempio il Pierson-Moskowitz spectrum o lo Jonswap spectrum.

¹³ Come mostrato in [H. E. Krogstad 00]

4.10. L'interazione corpo-moto ondoso

In questo paragrafo si determinano le forze che nascono su un corpo galleggiante immerso in un moto ondoso¹⁴.

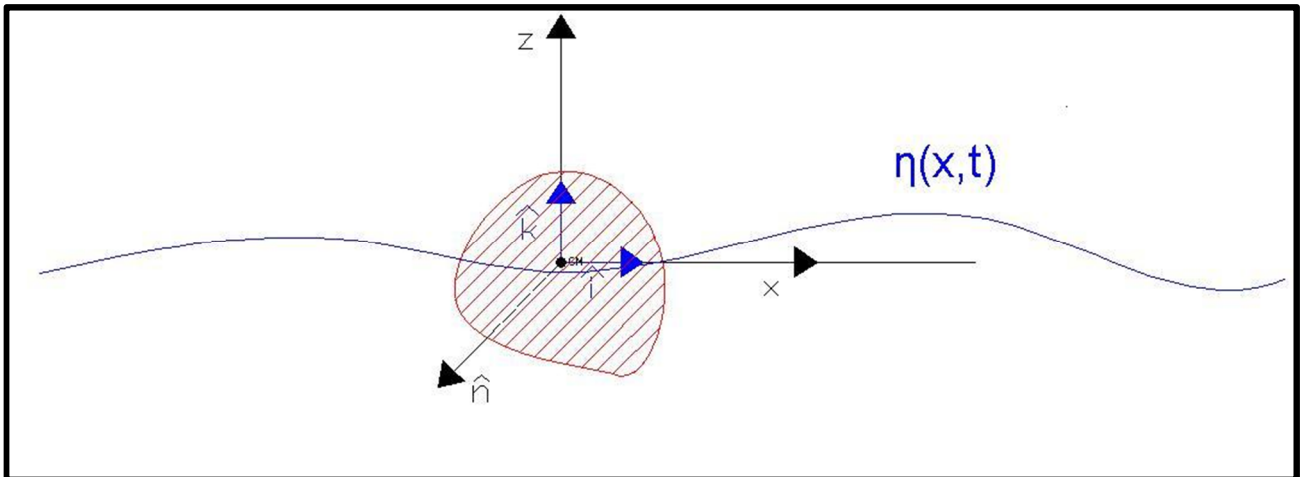


Figura 4.10-1: Schema del corpo immerso nel moto ondoso

Come mostrato in Figura 4.10-1 il corpo è posto con il centro di massa al centro del sistema di riferimento. Valgono tutte le ipotesi formulate in precedenza per la teoria lineare delle onde di piccola ampiezza, ed inoltre si suppongono trascurabili gli effetti viscosi (ipotesi verificata se il corpo ha delle dimensioni abbastanza più grandi dell' ampiezza dell'onda incidente). Occorre però includere un nuovo vincolo il quale afferma che le particelle a contatto con il corpo si muovono alla stessa velocità del corpo stesso. In pratica, su un sistema di riferimento solidale al corpo, le particelle che sono direttamente a contatto con esso sono ferme. Il problema può essere formulato in termini analitici:

$$\bar{\nabla}\phi(x, y, z, t)^T \hat{n} = Vbn \quad (4.101)$$

Dove n è il versore normale alla superficie del corpo. E' possibile scomporre il problema in due domini : il primo caratterizzato dai punti appartenenti alla superficie di contorno del corpo (S) ed il secondo caratterizzato dai punti occupati dalle acque (V). Ovviamente questo secondo dominio sarà lo stesso di quello trattato nel problema generale a meno dei punti appartenenti al volume ora occupato dal corpo galleggiante stesso. Entrambi i domini essendo il corpo galleggiante avranno rispettivamente superfici e volumi variabili nel tempo.

¹⁴ Come mostrato in [A.H. Techet]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad \forall x, y, z \in V, \forall t \\ v_z(x, y, z, t) \Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -h \\ t \end{pmatrix}} = \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -h \\ t \end{pmatrix}} = 0 \quad \forall x, y \in V, \forall t \\ \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = v_z(x, y, 0, t) \quad \forall x, y \in V, \forall t \\ \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ t \end{pmatrix}} = -g\eta(x, t) \quad \forall x, y \in V, \forall t \\ \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z} n_z = V b n \quad \forall x, y, z \in S, \forall t \end{array} \right. \quad (4.102)$$

Data la linearità del problema scomponiamo il potenziale di velocità nella somma di tre termini:

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_I(x, y, z, t) + \phi_D(x, y, z, t) + \phi_R(x, y, z, t) \quad (4.103)$$

Dove i tre potenziali sono rispettivamente:

- 1) $\phi_I(x, y, z, t)$ (potenziale incidente): è il potenziale che si crea considerando la sola onda incidente come se agisse indisturbata, in pratica è il problema risolto nei precedenti paragrafi. I risultati di questo problema saranno poi utilizzati sul dominio V dato che la parte dei punti occupati dal corpo perde di interesse.
- 2) $\phi_D(x, y, z, t)$ (potenziale di diffrazione): è il potenziale che si crea considerando il corpo tenuto fermo nel moto ondoso
- 3) $\phi_R(x, y, z, t)$ (potenziale di radiazione): è il potenziale dovuto alla oscillazione del corpo nel mare in quiete

Per ognuno di questi tre potenziali il problema sarà semplificato di alcune condizioni al contorno. Prima di andare ad esaminarli in forma separata si sfrutta il fatto che, come visto in precedenza i risultati sono onde sinusoidali ed è quindi possibile introdurre un fasore complesso rappresentativo del potenziale:

$$\phi(x, y, z, t) = Re \left(a \hat{\phi}_I(x, y, z) e^{i\omega t} + a \hat{\phi}_D(x, y, z) e^{i\omega t} + \phi_R(x, y, z) \right) \quad (4.10-4)$$

Dove si osserva che Φ_R non è necessariamente legato alla ampiezza dell'onda incidente (a), esso dipenderà dal moto che deve seguire il corpo galleggiante. Quindi i tre potenziali elencati sopra possono essere trovati:

$$\begin{cases} \phi_I(x, y, z, t) = \text{Re}(\hat{a}\hat{\phi}_I(x, y, z)e^{i\omega t}) \\ \phi_D(x, y, z, t) = \text{Re}(\hat{a}\hat{\phi}_D(x, y, z)e^{i\omega t}) \\ \phi_R(x, y, z) = \sum_{j=1}^6 \phi_j(x, y, z)x_j(t) \end{cases} \quad (4.105)$$

Dove il flusso Φ_R è scritto come la sommatoria del prodotto di due termini: il primo ϕ_j rappresenta il potenziale che si ha quando il corpo si muove di moto unitario nella direzione j-esima, mentre il secondo $x_j(t)$ rappresenta lo spostamento "generalizzato" del corpo nella direzione j-esima. Si osserva come l'indice della sommatoria scorra da uno a sei, questo perché tiene conto dei possibili gradi di libertà del corpo che sono 3 traslazioni e 3 rotazioni. Più avanti verrà esaminato un dispositivo con un solo grado di libertà.

Ora si va quindi a formulare il problema generale nei tre casi separati e si applica alle equazioni la trasformazione nel dominio dei fasori.

Il potenziale incidente

Il problema del solo potenziale incidente può essere così posto (dove si sono raccolte in un'unica equazione le due condizioni sulla superficie libera del problema (4.102):

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^2 \phi_I(x, z, t) = 0 & \text{Equazione di Laplace} \\ \left. \frac{\partial^2 \phi_I(x, z, t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_I(x, z, t)}{\partial z} \right|_{\begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ t \end{Bmatrix}} = 0 & \text{Condizioni sulla superficie libera} \\ \left. \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} \right|_{\begin{Bmatrix} x \\ -h \\ t \end{Bmatrix}} = 0 & \text{Condizioni sul fondale} \\ \text{Nessuna} & \text{Condizioni sul corpo} \end{cases} \quad (4.106)$$

Dove data l'assenza del corpo il problema torna ad essere lo stesso di quello trattato nei paragrafi precedenti. E' già stata mostrata la soluzione di questo problema tuttavia per completezza mostriamo anche per questo caso la trasformazione nel dominio dei fasori:

$$\phi_I(x, z, t) = \text{Re}(\hat{\phi}_I(x, z)ae^{i\omega t}) \quad (4.107)$$

Da cui:

$$\bar{\nabla}^2 \text{Re}(\hat{\phi}_I(x, z) a e^{i\omega t}) = 0 \quad (4.108)$$

L'operatore nabla (∇) contiene al suo interno delle derivate parziali rispetto alle coordinate spaziali, dato che la derivata della parte reale di un numero complesso coincide con la parte reale della derivata:

$$\text{Re}(a e^{i\omega t} \bar{\nabla}^2 \hat{\phi}_I(x, z)) = 0 \quad \forall t, x, z \quad (4.109)$$

Come si vede l'unico modo per rispettare la relazione per ogni istante di tempo è quello:

$$\bar{\nabla}^2 \hat{\phi}_I(x, z) = 0 \quad \forall x, z \quad (4.1010)$$

In modo del tutto analogo la condizione sul fondale:

$$\left. \frac{\partial \hat{\phi}(x, z)}{\partial z} \right|_{\substack{x \\ -h}} = 0 \quad \forall x \quad (4.1011)$$

Leggermente diversa la condizione sulla superficie libera in quanto è coinvolta una derivata temporale:

$$\text{Re}\left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_I(x, z) a e^{i\omega t}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \hat{\phi}_I(x, z) a e^{i\omega t}}{\partial z}\right) = 0 \quad (4.1012)$$

La parte a sinistra contiene la derivata seconda di un fasore, ricordo che la derivata semplice di un fasore è il fasore stesso moltiplicato per $j\omega$. Mentre la parte di destra è analoga alle grandezze trattate sopra:

$$\text{Re}\left(\left(-\omega^2 \hat{\phi}_I(x, z) + g \frac{\partial \hat{\phi}_I(x, z)}{\partial z}\right) a e^{i\omega t}\right) = 0 \quad \forall x, z, t \quad (4.1013)$$

Affinché l'equazione sia verificata per ogni istante di tempo deve valere che:

$$\left(-\omega^2 \hat{\phi}_I(x, z) + g \frac{\partial \hat{\phi}_I(x, z)}{\partial z} \right) = 0 \quad \forall x, z \quad (4.1014)$$

Dunque ora il problema (4.106) può essere riscritto:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 \hat{\phi}_I(x, z) = 0 \quad \forall x, z & \text{Equazione di Laplace} \\ -\omega^2 \hat{\phi}_I(x, z) + g \frac{\partial \hat{\phi}_I(x, z)}{\partial z} = 0 \quad \forall x, z = 0 & \text{Condizioni sulla superficie libera} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_I(x, z)}{\partial z} \Big|_{\substack{x \\ -h}} = 0 \quad \forall x & \text{Condizioni sul fondale} \\ \text{Nessuna} & \text{Condizioni sul corpo} \end{array} \right. \quad (4.1015)$$

Dove è sparita la dipendenza dal tempo.

La soluzione di questo problema sarà quindi:

$$\hat{\phi}_I(x, z) = j \frac{\omega \cosh(k(z + h))}{k \sinh(kh)} e^{-ikx} \quad (4.1016)$$

Nell'ipotesi di acque profonde:

$$\hat{\phi}_I(x, z) = j \frac{\omega}{k} e^{kz} e^{-ikx} \quad (4.1017)$$

Del tutto analoga a quella trovata nel dominio del tempo.

Il potenziale di diffrazione

Il problema in questo caso include il corpo, tenuto fermo sotto l'azione dell'onda incidente. Al fine di compensare l'effetto dell'onda incidente sui punti del contorno del corpo deve valere che:

$$\bar{\nabla} \Phi_D(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z) = -\bar{\nabla} \Phi_I(x, z, t)^T \hat{n}(x, y, z) \quad \forall x, S \quad \forall t \quad (4.10-18)$$

Quindi il problema diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}^2 \phi_D(x, y, z, t) = 0 \quad \forall x, y, z \in V \quad \forall t \quad \text{Equazione di Laplace} \\ \frac{\partial^2 \phi_D(x, y, z, t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_D(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad \forall x, y \in V \quad \forall t \quad \text{Condizioni sulla superficie libera} \\ \frac{\partial \phi_D(x, y, z, t)}{\partial z} \bigg|_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -h \\ t \end{pmatrix}} = 0 \quad \forall x, y \in V \quad \forall t \quad \text{Condizioni sul fondale} \\ \bar{\nabla} \Phi_D(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z) = -\bar{\nabla} \Phi_I(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in S \quad \forall t \quad \text{Condizione sul corpo} \end{array} \right. \quad (4.1019)$$

Che nel dominio dei fasori:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}^2 \hat{\phi}_D(x, y, z) = 0 \quad \forall x, y, z \in V \quad \text{Equazione di Laplace} \\ -\omega^2 \hat{\phi}_D(x, y, z) + g \frac{\partial \hat{\phi}_D(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad \forall z = 0 \quad \forall x, y \in V \quad \text{Condizioni sulla superficie libera} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_D(x, y, z)}{\partial z} \bigg|_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -h \\ t \end{pmatrix}} = 0 \quad \forall x, y, z \in V \quad \text{Condizioni sul fondale} \\ \bar{\nabla} \hat{\phi}_D(x, y, z)^T \hat{n}(x, y, z) = -\bar{\nabla} \hat{\phi}_I(x, y, z)^T \hat{n}(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in S \quad \text{Condizioni sul corpo} \end{array} \right. \quad (4.1020)$$

Il potenziale di radiazione

In questo caso la condizione sul corpo ci dice che i punti appartenenti al contorno del corpo possiedono la velocità imposta dal corpo stesso:

$$\bar{\nabla} \Phi_R(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z, t) = \bar{V} b n(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z, t) \quad \forall x, y, z \in S \quad \forall t \quad (4.10-21)$$

Quindi il problema diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}^2 \phi_R(x, y, z, t) = 0 \quad \forall x, y, z \in V \quad \forall t \quad \text{Equazione di Laplace} \\ \frac{\partial^2 \phi_R(x, y, z, t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_R(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad \forall x, y \in V \quad \forall t \quad \text{Condizioni sulla superficie libera} \\ \frac{\partial \phi_R(x, y, z, t)}{\partial z} \bigg|_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -h \\ t \end{pmatrix}} = 0 \quad \forall x, y \in V \quad \forall t \quad \text{Condizioni sul fondale} \\ \bar{\nabla} \Phi_R(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z) = \bar{V} b n(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in S \quad \forall t \quad \text{Condizione sul corpo} \end{array} \right. \quad (4.1022)$$

Per semplicità riferiamoci solo ad un moto lungo l'asse z (heave motion), il vettore di velocità del corpo può essere scritto come:

$$\bar{V}bn(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_{b3}(x, y, z, t) \end{pmatrix} \quad \forall x, y, z \in S \quad (4.1023)$$

Quindi essendo la normale un vettore:

$$\hat{n}(x, y, z) = \begin{pmatrix} n_x(x, y, z) \\ n_y(x, y, z) \\ n_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad \forall x, y, z \in S \quad (4.1024)$$

Il prodotto scalare del membro di destra dell'equazione rappresentativa del vincolo sul corpo diventa:

$$\bar{V}bn(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z) = \frac{\partial x_3(x, y, z, t)}{\partial t} n_z(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in S \quad \forall t \quad (4.10-25)$$

Nel dominio dei fasori ponendo:

$$x_3(x, y, z, t) = \text{Re}(\hat{x}_3(x, y, z)e^{i\omega t}) \quad \forall x, y, z \in S \quad (4.1026)$$

Da cui l'equazione (4.1025) diventa:

$$\bar{V}bn(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z, t) = \text{Re}(i\omega \hat{x}_3(x, y, z)n_z(x, y, z)e^{i\omega t}) \quad \forall x, y, z \in S \quad \forall t \quad (4.10-27)$$

Il membro di sinistra dell'ultima equazione del problema (4.1022) diventa nel dominio dei fasori:

$$\bar{V}\Phi_R(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, y, z) = \text{Re}(\bar{V}\hat{\Phi}_{R3}(x, y, z)^T \hat{n}(x, y, z)\hat{x}_3(x, y, z)e^{i\omega t}) \quad (4.1028)$$

Da cui questo ultimo vincolo diventa:

$$\bar{V}\hat{\Phi}_{R3}(x, y, z)^T \hat{n}(x, y, z) = i\omega n_z(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in S \quad (4.1029)$$

Il problema di radiazione diventa quindi nell'ipotesi di un moto che si svolge nella sola direzione z:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\nabla}^2 \hat{\phi}_{R3}(x, y, z) = 0 \quad \forall x, y, z \in V & \text{Equazione di Laplace} \\ -\omega^2 \hat{\phi}_{R3}(x, y, z) + g \frac{\partial \hat{\phi}_{R3}(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad \forall z = 0 \quad \forall x, y \in V & \text{Condizioni sulla superficie libera} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_{R3}(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ -h \end{array} \right\}} = 0 \quad \forall x, y, z \in V & \text{Condizioni sul fondale} \\ \bar{\nabla} \hat{\phi}_{R3}(x, y, z)^T \hat{n}(x, y, z) = i\omega n_z(x, y, z) \quad \forall x, y, z \in S & \text{Condizioni sul corpo} \end{array} \right. \quad (4.1030)$$

Applichiamo ora all'equazione (4.104) il vincolo imposto dal corpo nella ipotesi di heavy motion e di un problema bidimensionale:

$$\phi(x, z, t) = Re(a\hat{\phi}_I(x, z)e^{i\omega t} + a\hat{\phi}_D(x, z)e^{i\omega t} + \hat{\phi}_R(x, z)\hat{x}_3(x, z)e^{i\omega t}) \quad (4.10-31)$$

La condizione sul corpo diventa:

$$\bar{\nabla} \phi(x, y, z, t)^T \hat{n}(x, z) = n_z(x, z) \frac{dx_3(t)}{dt} \quad \forall x, z \in S \quad (4.1032)$$

In forma complessa:

$$\begin{aligned} Re(a\bar{\nabla}(\hat{\phi}_I(x, z) + \hat{\phi}_D(x, z))^T \hat{n}(x, z))e^{i\omega t} + (\bar{\nabla} \hat{\phi}_R(x, z)^T \hat{n}(x, z))\hat{x}_3(x, z)e^{i\omega t} = \\ Re(i\omega n_z(x, z)\hat{x}_3(x, z)e^{i\omega t}) \quad \forall x, z \in S \quad \forall t \end{aligned} \quad (4.10-33)$$

L'uguaglianza è verificata se:

$$\bar{\nabla} \hat{\phi}_R(x, z)^T \hat{n}(x, z) = i\omega n_z(x, z) \quad (4.1034)$$

Ed:

$$\bar{\nabla} \hat{\phi}_D(x, z)^T \hat{n}(x, z) = -\bar{\nabla} \hat{\phi}_I(x, z, t)^T \hat{n}(x, z) \quad \forall x, z \in S \quad (4.1035)$$

Che sono proprio le condizioni che erano state imposte in precedenza per i problemi di radiazione e diffrazione.

4.11. Forze sul galleggiante

Per andare a calcolare le forze che agiscono sul corpo è necessario considerare il teorema di Bernoulli come scritto nella equazione (4.518) possiamo scrivere la pressione dinamica come (la pressione dinamica non tiene conto del termine idrostatico)¹⁵:

$$p(t, x, z) = -\rho \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial t} \quad (4.111)$$

E quindi la forza agente sul corpo:

$$\bar{F}(t) = - \iint_S p(t, x, z) \hat{n}(x, z) dS \quad (4.112)$$

Dove il segno meno è coerente con il fatto che la normale è quella del corpo che è uguale ed opposta alla direzione con cui la forza "associata" alla pressione agisce sul corpo stesso.

Se si ipotizza di essere in condizioni di heave motion, la componente più significativa della forza è quella lungo z in quanto le altre componenti si scaricheranno sulla struttura esterna senza interessare il trasferimento di potenza.

$$F_z(t) = \bar{F}(t)^T \hat{k} = - \iint_S p(t, x, z) n_z(x, z) dS = \iint_S \rho \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial t} n_z(x, z) dS \quad (4.11-3)$$

Se ora introduciamo i fasori e la relativa scomposizione del potenziale otteniamo:

$$F_z(t) = \text{Re} \left(\iint_S \left(j\omega \rho n_z(x, z) \left(a\hat{\phi}_I(x, z) + a\hat{\phi}_D(x, z) \right) + \hat{x}_3 \hat{\phi}_R(x, z) \right) e^{i\omega t} dS + F_{id}(t) \right) \quad (4.11-4)$$

Dove il termine F_{id} rappresenta la forza idrostatica che completa l'espressione, tale termine sarà proporzionale allo spostamento del corpo.

Introducendo i vettori complessi rappresentativi delle varie forze è possibile completare lo scenario:

¹⁵ Come mostrato in [A.H. Techet]

$$\begin{cases} F_{id}(t) = -C_{33}x_3(t) \\ \widehat{F}_I = j\omega\rho \iint_S n_z(x,z) a \widehat{\Phi}_I(x,z) ds \\ \widehat{F}_D = j\omega\rho \iint_S n_z(x,z) a \widehat{\Phi}_D(x,z) ds \\ \widehat{F}_R = j\omega\rho \iint_S n_z(x,z) a \widehat{\Phi}_R(x,z) ds \end{cases} \quad (4.115)$$

La somma della forza incidente (Froude Krylov) con la forza di diffrazione rappresenta la forza di eccitazione. La forza di radiazione può essere scritta:

$$\widehat{F}_R = \omega^2 A_{33} - j\omega B_{33} \quad (4.116)$$

Dove A_{33} e B_{33} sono rispettivamente i coefficienti di add-mass e damping. Per l'analisi prendiamo in esame un corpo cilindrico di raggio (a) e parzialmente immerso in acqua con profondità (b) chiamato draft.

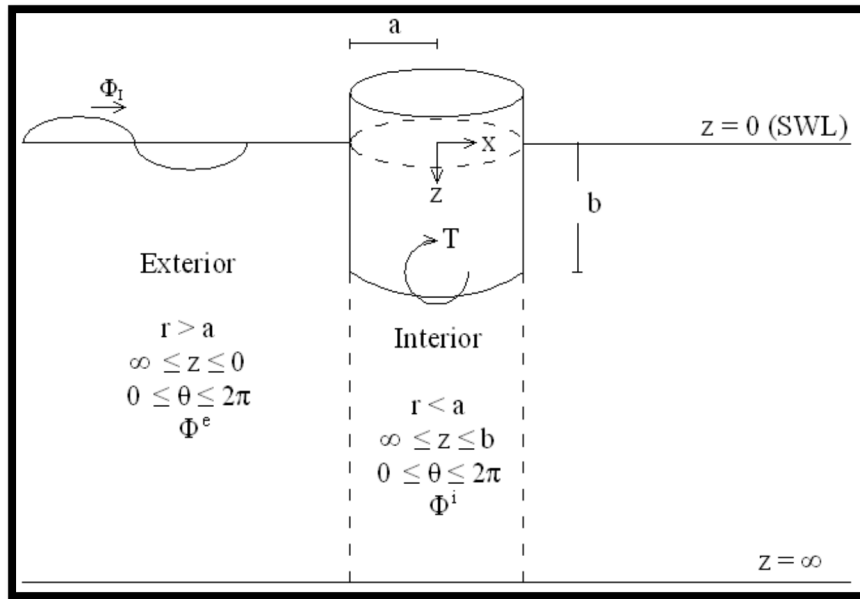


Figura 4.11-1: Parametri geometrici galleggiante

In letteratura si trovano metodi analitici che permettono di risolvere i problemi di diffrazione e di forza incidente mediante metodi di separazione di variabili¹⁶. Il modulo della forza di eccitazione (forza frude-krilov e forza di diffrazione) può essere dedotto noti i seguenti parametri (si sono già introdotti ma si cambia il simbolo letterale per permettere di leggere il grafico)¹⁷:

¹⁶ Come mostrato in [D.D. Bhatta 03]

¹⁷ Come mostrato in [B. Moshfegh 11]

$$\begin{cases} A = \text{ampizza onda incidente (m)} \\ K_0 * a = \text{prodotto tra numero d'onde e raggio cilindro} \\ \frac{b}{a} = \frac{\text{draft}}{\text{raggio galleggiante}} \end{cases}$$

Dal seguente grafico:

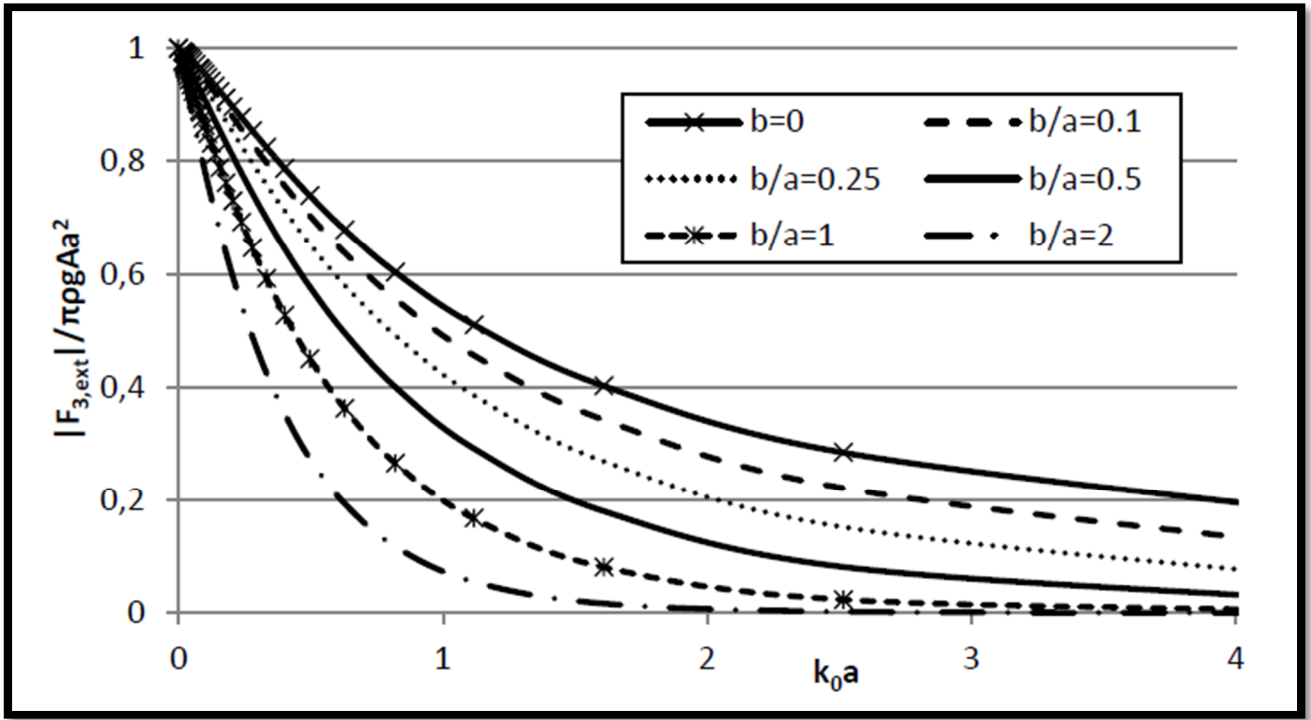


Figura 4.11-2: Forza di eccitazione normalizzata in funzione dei parametri geometrici del galleggiante

La seconda legge di newton applicata al corpo in galleggiamento sarà:

$$F_{ext}(t) + F_R(t) + F_{hid}(t) + F_{pto}(t) = m \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} \quad (4.117)$$

Dove m è la massa complessiva del galleggiante e del dispositivo di conversione (power take off).

Quindi indicando con:

$$F_E(t) = F_{pto}(t) + F_{ext}(t) \quad (4.118)$$

Possiamo riscrivere l'equazione nel dominio della frequenza:

$$Re((\widehat{F}_E + \widehat{F}_R \widehat{x}_3 - C_{33} \widehat{x}_3) e^{i\omega t}) = Re((- \omega^2 m \widehat{x}_3) e^{i\omega t}) \quad \forall t \quad (4.11-9)$$

Affinché l'equazione sia verificata per ogni istante di tempo deve accadere che:

$$\widehat{F}_E(\omega) + \widehat{F}_R(\omega)\widehat{x}_3 + \widehat{F}_{hid} = -m\widehat{x}_3\omega^2 \quad (4.1110)$$

Dove è possibile rappresentare la funzione di trasferimento esplicitando i vari termini:

$$H(\omega) = \frac{\widehat{x}_3}{\widehat{F}_E} = \frac{1}{(-\omega^2(m + A_{33}) + j\omega B_{33} + C_{33})} \quad (4.1111)$$

La funzione di trasferimento descritta sopra rappresenta quindi la risposta in frequenza tra la forza di ingresso e lo spostamento verticale. Ponendo ora:

$$\begin{cases} M = m + A_{33} \\ \beta = B_{33} \\ k = C_{33} \end{cases} \quad (4.1112)$$

Otteniamo nel dominio del tempo il seguente sistema dinamico:

$$F_e(t) = M \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} + \beta \frac{dx_3(t)}{dt} + kx_3(t) \quad (4.1113)$$

Dove andando ad esplicitare la (4.118) :

$$F_e(t) = F_{pto}(t) + |\widehat{F_{ext}}| \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.1114)$$

Il sistema dinamico descritto nella (4.1114) è analogo ad un sistema massa-molla-smorzatore.

L'obiettivo del controllo è quello di agire sulla forza esercitata dalla macchina lineare (Fpto) per avere la massima produzione di energia.

5. Macchine elettriche lineari

5.1. Classificazione delle macchine lineari

In questo paragrafo vengono introdotti i vari tipi di generatori lineari che possono essere utilizzati in un WEC. Una macchina lineare è composta da uno statore e da un traslatore (che è analogo al rotore di una macchina rotante)¹⁸. Una possibile costruzione di una macchina lineare partendo da una macchina rotante è mostrato in Figura 5.1-1. Nelle macchine lineari le grandezze meccaniche più significative diventano forza e velocità assiale in analogia con la coppia e la velocità angolare di una macchina rotante. Una sostanziale differenza rispetto alle macchine rotanti è la forza di attrazione/repulsione tra il traslatore e lo statore.

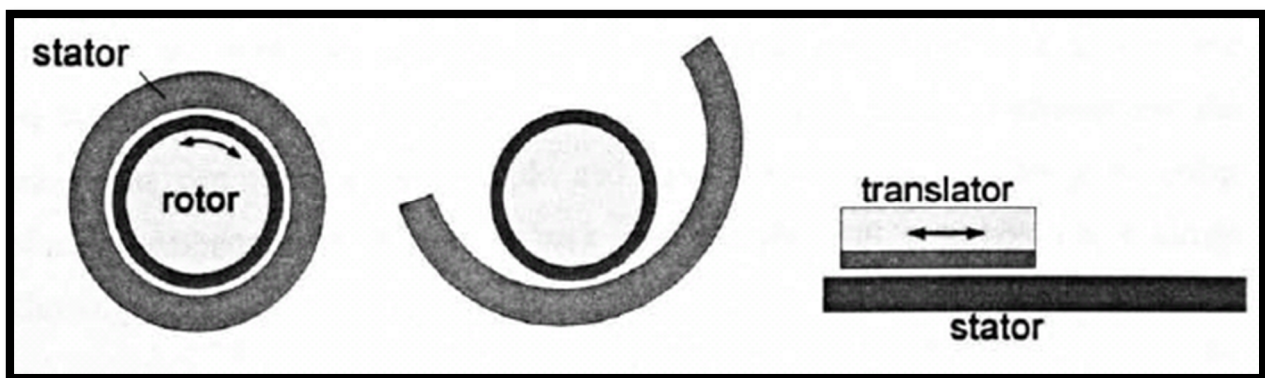


Figura 5.1-1: Sviluppo di una macchina lineare partendo da una macchina rotante

Le macchine lineari possono essere trovate in varie configurazioni, seguendo la metodologia di costruzione di Figura 5.1-1 dalla quale si ottiene una macchina lineare "flat" che possiamo trovare con lo statore che si affaccia sul traslatore da un solo lato (single-sided Figura 5.1-2 d) o invece che si affaccia sul traslatore da entrambi i lati (double-sided Figura 5.1-2 e).

¹⁸ Come mostrato in [I. Boldea 97]

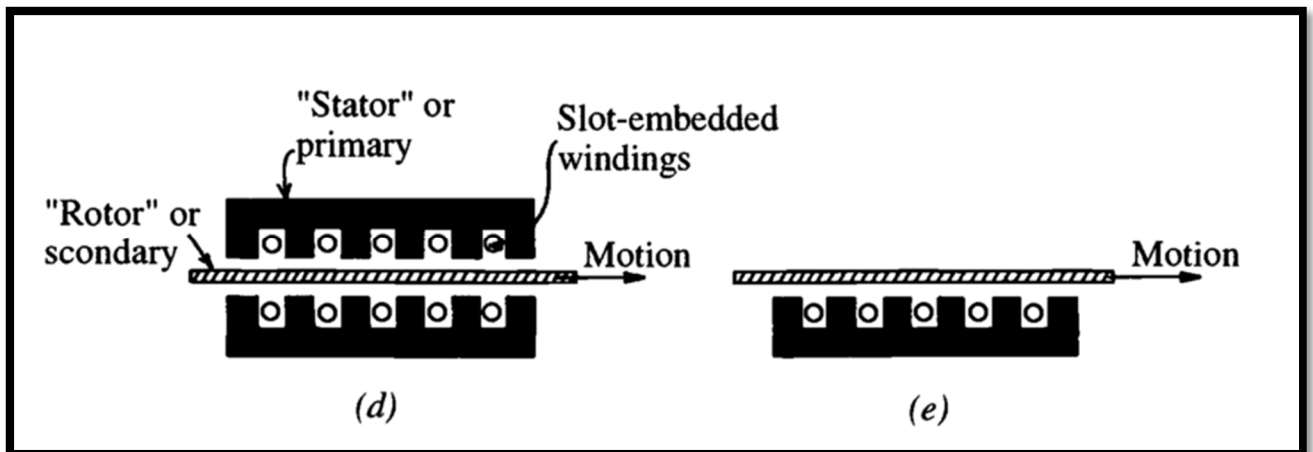


Figura 5.1-2: Macchina lineare flat in configurazione d)double-sided e)single sided

Se si indica come primario la struttura in cui sono posti gli avvolgimenti trifase è possibile avere macchine con primario statico o in movimento. Ad esempio in Figura 5.1-3 è mostrata una macchina sincrona a riluttanza variabile con primario in movimento.

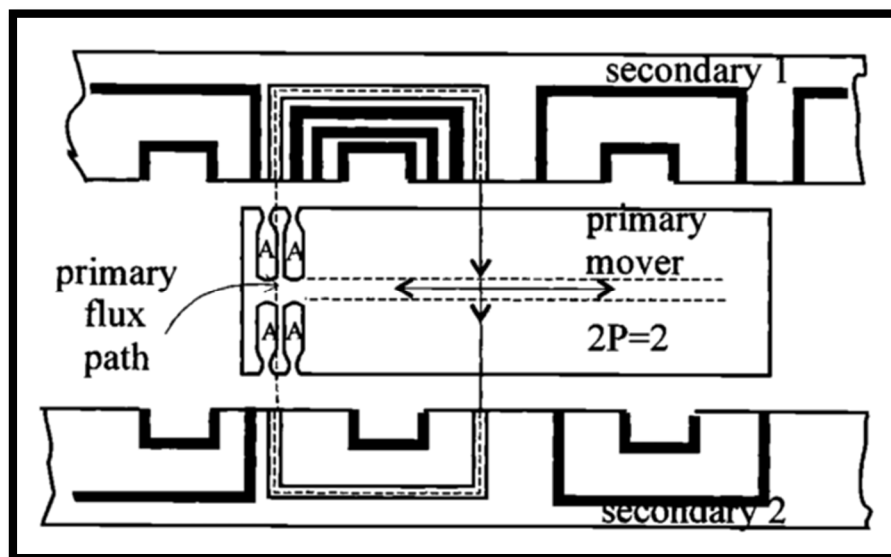


Figura 5.1-3:LSRM in configurazione "flat" double-sided con primario come traslatore

Per completare la tipologia di configurazione delle macchine lineari vengono introdotte le macchine con configurazione tubolare che possono essere ottenute da una macchina rotante come descritto in Figura 5.1-4 .

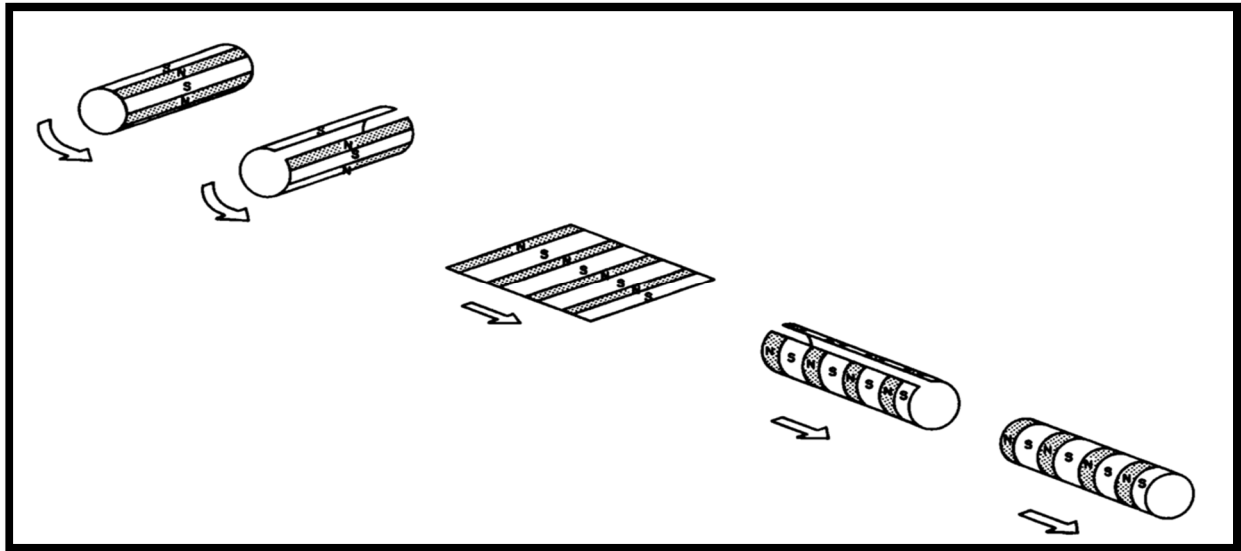


Figura 5.1-4: Configurazione tubolare ottenuta da manipolazione di una macchina rotante

Quindi dalle principali macchine rotanti è possibile ottenere con le operazioni viste sopra le equivalenti macchine lineari, in questo paragrafo si elencano e descrivono le seguenti tipologie:

1. Macchina lineare a induzione
2. Macchina sincrona con magneti permanenti
3. Macchina sincrona a riluttanza variabile
4. Macchina lineare a riluttanza variabile (switched)

Macchina lineare ad induzione:

La Linear Induction Machine (L.I.M.) è la macchina lineare analoga alla macchina asincrona. Gli avvolgimenti sullo statore e sul rotore creano a regime un campo magnetico di traferro rappresentabile come una onda traslante la cui velocità è legata alla frequenza con cui sono alimentate le fasi di statore. In modo perfettamente analogo alla versione rotante la velocità del traslatore può essere: inferiore a quella del campo nel funzionamento da motore e superiore a quella del campo nel funzionamento da generatore. La macchina può funzionare a velocità variabile grazie all'alimentazione attraverso i convertitori statici.

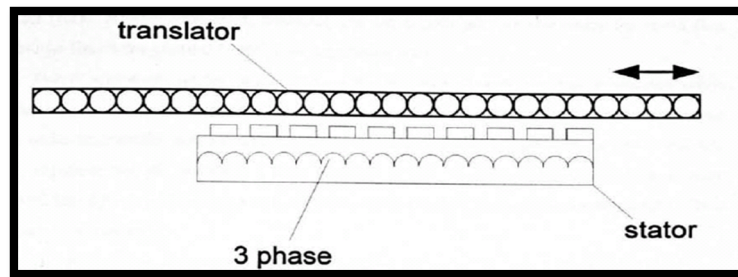


Figura 5.1-5: Macchina lineare ad induzione

La macchina può essere "flat" single-sided /double-sided o tubolare. I punti di forza di questa tipologia di macchina sono la estrema robustezza e affidabilità, di contro abbiamo basse efficienze dovute in generale ad un ampio spessore di traferro e alle basse velocità a cui la macchina deve operare.

Macchina sincrona con magneti permanenti:

La macchina sincrona con magneti permanenti è l'equivalente lineare della macchina brushless isotropa rotante. Le configurazioni che può assumere sono "flat" single-sided /double-sided o tubolare con il primario che può funzionare come traslatore o come statore. In Figura 5.1-6 è mostrata una configurazione flat/double-sided.

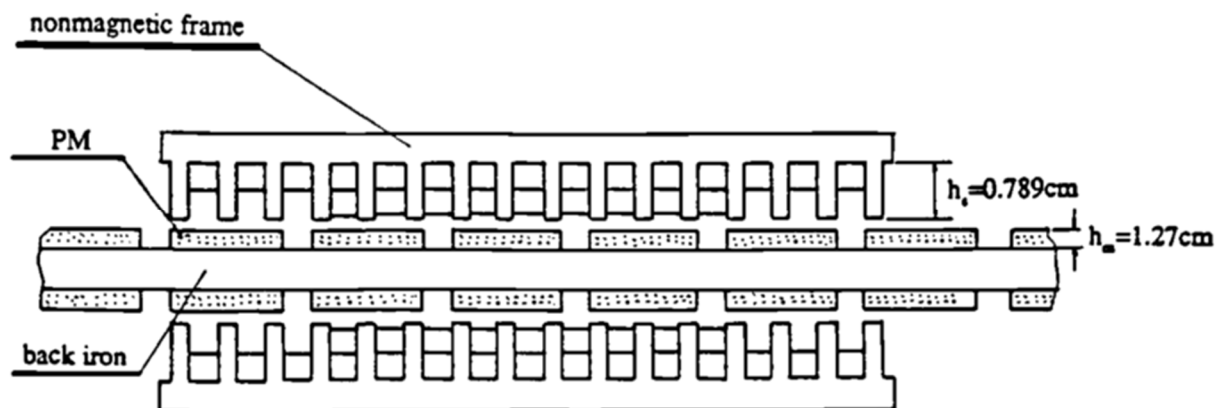


Figura 5.1-6: LSPM con configurazione flat/duble sided

Questa tipologia di macchina è descritta in letteratura ad oggi come la migliore per applicazioni direct-drive. Il principale svantaggio è legato all'utilizzo di magneti permanenti. In modo perfettamente analogo al caso di una macchina rotante il controllo è agevolato dalla trasformazione delle equazioni della macchina sugli assi d-q.

Macchina sincrona a riluttanza variabile:

La macchina sincrona a riluttanza variabile costituisce l'equivalente lineare della macchina brushless anisotropa priva di magneti permanenti. Anche questa tipologia di macchine può essere in configurazione flat single sided/double sided o tubolare, il primario può essere lo statore o il traslatore. In Figura 5.1-7 è mostrata una configurazione tubolare con secondario come traslatore, mentre in Figura 5.1-3 il primario è il traslatore e la configurazione è flat/double sided.

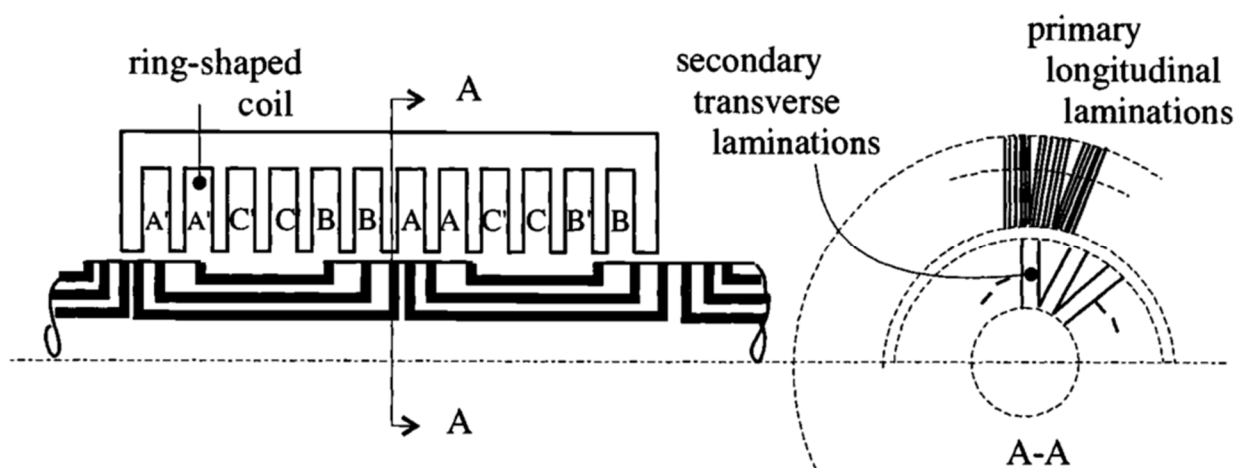


Figura 5.1-7: LSRM in configurazione tubolare con secondario come traslatore

Nelle figure sopra mostrate si nota come al fine di incrementare le prestazioni si utilizzano barriere di flusso sul secondario. Anche per questa tipologia è possibile scomporre la macchina sugli assi d-q per facilitarne il controllo.

Macchina a riluttanza variabile:

Il Linera Switched Reluctance Generator (L.S.R.G.) è composto da un traslatore (sul quale non sono presenti gli avvolgimenti) che ha un certo numero di poli e da uno statore con un numero di poli diverso (sul quale sono presenti gli avvolgimenti). Una sezione della macchina è mostrata in Figura 5.1-8. Il principio di funzionamento da generatore può essere così riassunto: il traslatore è messo in moto dal PTO, attraverso il sistema di controllo si attiva il passaggio in sequenza delle correnti nelle varie fasi, il campo magnetico interagendo con la struttura del traslatore crea una forza resistente che tende ad allineare i poli di traslatore e rotore. Il prodotto forza per velocità rappresenterà quindi la potenza trasmessa verso la rete.

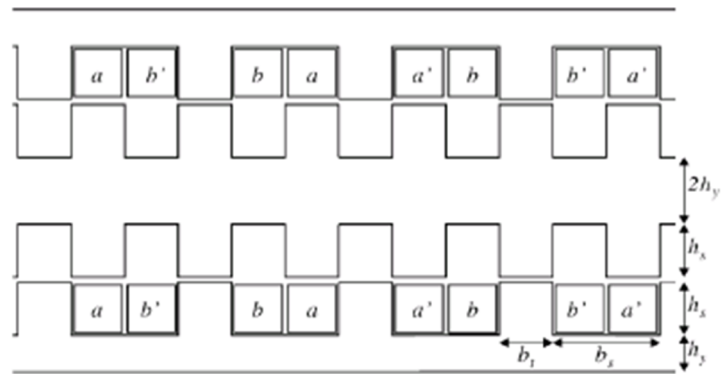


Figura 5.1-8: Sezione di una macchina lineare a riluttanza variabile

I principali vantaggi di questo tipo di macchina sono la facilità di operare su quattro quadranti, la semplicità della struttura con avvolgimenti presenti solo nel traslatore, la buona affidabilità e l'alta tolleranza al guasto rispetto agli altri tipi di generatore. Lo svantaggio principale è la caratteristica non lineare, infatti la matrice delle induttanze dipende dalla posizione del traslatore e dalla corrente.

5.2. La dinamica delle macchine lineari

Come evidenziato in vari documenti in letteratura¹⁹ è possibile estendere la teoria della dinamica delle macchine rotanti alle macchine lineari purché si trascurino gli effetti di bordo. L'unica differenza sostanziale consiste nella presenza delle forze di attrazione tra traslatore e statore. Nell'analisi che segue vengono trascurati gli effetti di queste forze che però diventano rilevanti nella progettazione della struttura di sostegno. Se si pensa ad una configurazione di una macchina lineare costruita da una macchina rotante seguendo l'operazione mostrata in Figura 5.1-1, la variabile meccanica significativa dei gradi di libertà della macchina diventa la traslazione rispetto all'asse orizzontale (in analogia nella configurazione rotante si ha l'angolo tra statore e rotore).

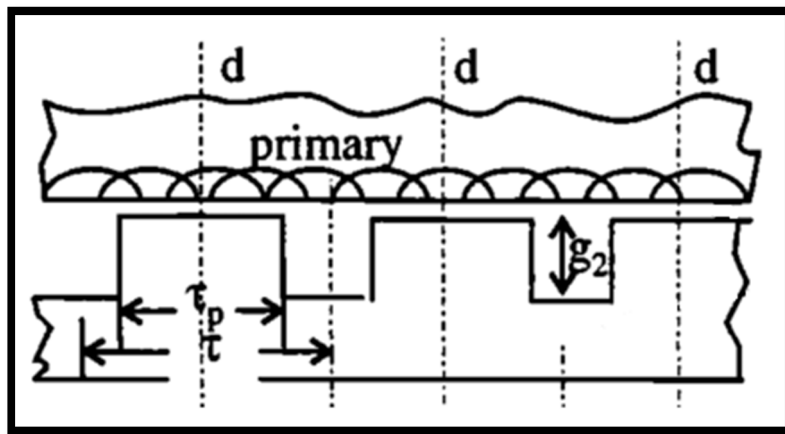


Figura 5.2-1: Parametri geometrici macchina lineare a riluttanza

In Figura 5.2-1 è mostrata una configurazione geometrica abbastanza semplificata di una macchina sincrona a riluttanza. Il parametro fondamentale di questo tipo di macchina è il passo polare. Il campo magnetico medio che si genera sulla superficie equipotenziale media di traferro è ancora una funzione periodica tale che:

$$B(x, \beta, \bar{t}) = B(x + 2\tau, \beta, \bar{t}) \quad \forall x, \beta, \bar{t} \quad (5.21)$$

Dove con x si indica la variabile lagrangiana che caratterizza la posizione del rotore rispetto allo statore. Con β si identificano i punti sulla superficie equipotenziale media di traferro da un sistema di riferimento solidale con il traslatore.

La periodicità del campo è quindi di 2τ , seguendo un analogia con le macchine rotanti l'equivalente delle coppie polari diventa p/τ .

¹⁹ Come mostrato in [I. Boldea 97]

E' valido quindi per la macchina lineare il modello in assi d-q di una macchina brushless anisotropa. Il modello è costruito in variabili trasformate seguendo le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_d(t) = R_s i_d(t) + L_d \frac{di_d(t)}{dt} - \omega(t) \psi_q(t) \\ v_q(t) = R_s i_q(t) + L_q \frac{di_q(t)}{dt} + \omega(t) \psi_d(t) \\ \psi_d(t) = L_d i_d(t) + \psi_{PM} \\ \psi_q(t) = L_q i_q(t) \\ \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Dove la relazione tra le grandezze trasformate e le grandezze in variabili è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{i}(t)' = T(\vartheta(t))^T \bar{i}(t) \\ \bar{\psi}'(\alpha(t), \bar{i}'(t)) = T(\vartheta(t))^T \bar{\psi}(\alpha(t), T(\vartheta(t)) \bar{i}'(t)) \\ \bar{v}'(\alpha(t), \bar{i}'(t)) = T(\vartheta(t))^T \bar{v}(\alpha(t), T(\vartheta(t)) \bar{i}'(t)) \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Dove con l'apice si è indicato le grandezze di park in grandezze trasformate, la matrice di trasformazione vale:

$$T^T(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta - \frac{4}{3}\pi) \\ -\sin(\vartheta) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Per completezza analitica sviluppiamo una delle espressioni di (5.23) ottenendo:

$$\begin{Bmatrix} i_d(t) \\ i_q(t) \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta(t)) & \cos(\theta(t) - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta(t) - \frac{4}{3}\pi) \\ -\sin(\vartheta(t)) & -\sin(\theta(t) - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta(t) - \frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

La variabile di trasformazione diventa in analogia al caso rotante:

$$\vartheta(t) = \frac{\pi}{\tau} x(t) \quad (5.26)$$

I circuiti di asse d e di asse q della macchina sono mostrati in Figura 5.2-2.

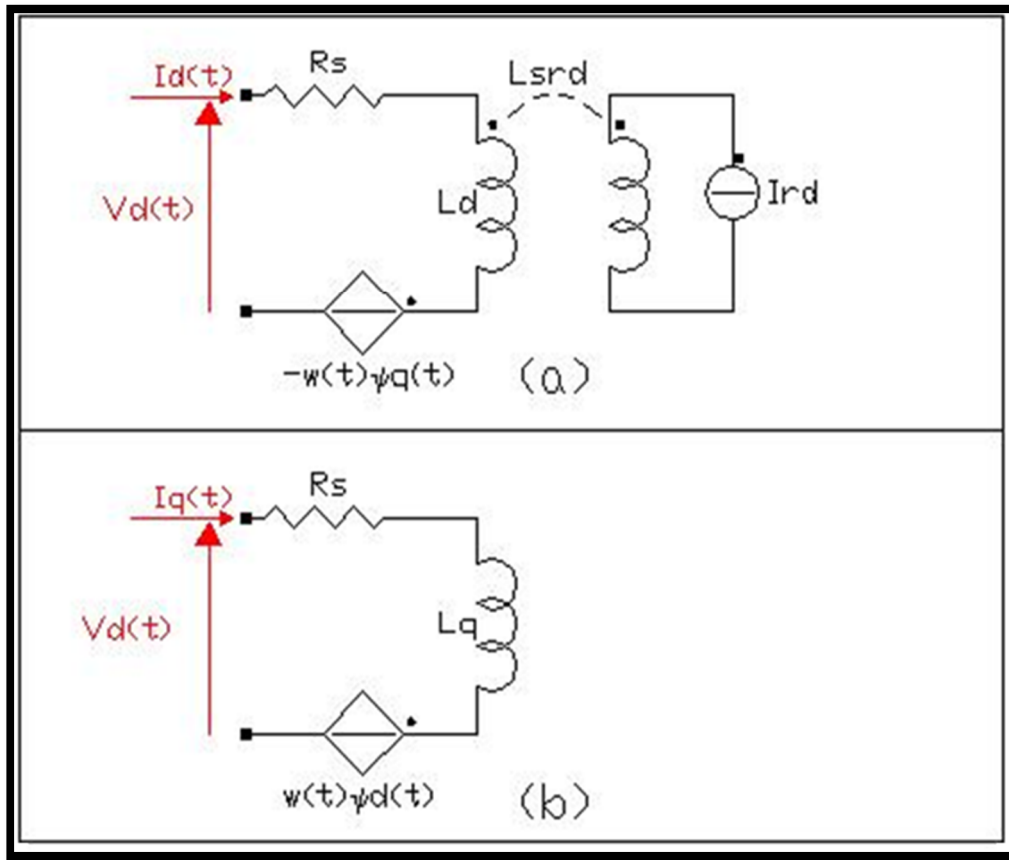


Figura 5.2-2: Circuito di asse diretto (a) Circuito di asse quadratura (b)

Dove per avere il flusso di asse diretto concatenato con l'induttanza di asse diretto si è posto un rotore fittizio costituito da un generatore di corrente tale che:

$$I_{rd}L_{rsd} = \psi_{PM} \quad (5.27)$$

La forza elettromagnetica è quindi del tutto analoga all'espressione della coppia elettromagnetica per una macchina brushless anisotropa dove al posto delle coppie polari sostituisco p/t .

$$Fe(\vec{i}) = \frac{\pi}{\tau} (\psi_{PM} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q) \quad (5.28)$$

Come per il caso rotante se togliamo il termine anisotropo otteniamo le espressioni della macchina sincrona lineare a magneti permanenti, se invece togliamo i magneti permanenti otteniamo il modello della macchina sincrona a riluttanza variabile. In Figura 5.2-3 vengono riassunte le principali

grandezze facendo un parallelo tra macchina rotante e macchina lineare, le espressioni delle forze generalizzate sono relative alla sola macchina Brushless anisotropa.

	MACCHINE ROTANTI	MACCHINE LINEARI
Variabile meccanica	$\alpha(t)$	$x(t)$
Coefficienti di Park	$\theta(t) = p\alpha(t)$	$\theta(t) = \frac{\pi}{\tau}x(t)$
Velocità meccanica	$\Omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$	$u(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
Velocità del campo	$\omega(t) = p \frac{d\alpha(t)}{dt}$	$\omega(t) = \frac{\pi}{\tau} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\pi}{\tau} u(t)$
Forza generalizzata	$Ce(\bar{t}) = p(\psi_{PM}i_q + (L_d - L_q)i_d i_q)$	$Fe(\bar{t}) = \frac{\pi}{\tau}(\psi_{PM}i_q + (L_d - L_q)i_d i_q)$

Figura 5.2-3: Analogia tra macchina brushless rotante e lineare

Per quanto riguarda la seguente tesi questa focalizza la sua attenzione sulla macchina sincrona a riluttanza variabile. In molti documenti in letteratura si osserva come da un punto di vista ingegneristico/economico questa non sia la soluzione migliore (è spesso privilegiata per azionamenti direct-drive la soluzione con macchina sincrona a magneti permanenti), tuttavia dal committente per ragioni essenzialmente strategiche (evitare l'utilizzo di magneti permanenti) è richiesto di approfondire questa soluzione. Di seguito scriviamo le equazioni che caratterizzano questo tipo di macchina con cui poi verrà costruito il modello Matlab:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_d(t) = R_s i_d(t) + L_d \frac{di_d(t)}{dt} - \omega(t) \psi_q(t) \\ v_q(t) = R_s i_q(t) + L_q \frac{di_q(t)}{dt} + \omega(t) \psi_d(t) \\ \psi_d(t) = L_d i_d(t) \\ \psi_q(t) = L_q i_q(t) \\ Fe(\bar{i}) = \frac{\pi}{\tau} (Ld - Lq) i_d i_q \end{array} \right. \quad (5.29)$$

6. La modellizzazione ed il controllo del WEC

6.1. L'architettura del sistema di controllo

In Figura 6.1-1 sono mostrati i principali elementi che costituiscono l'architettura del sistema di controllo.

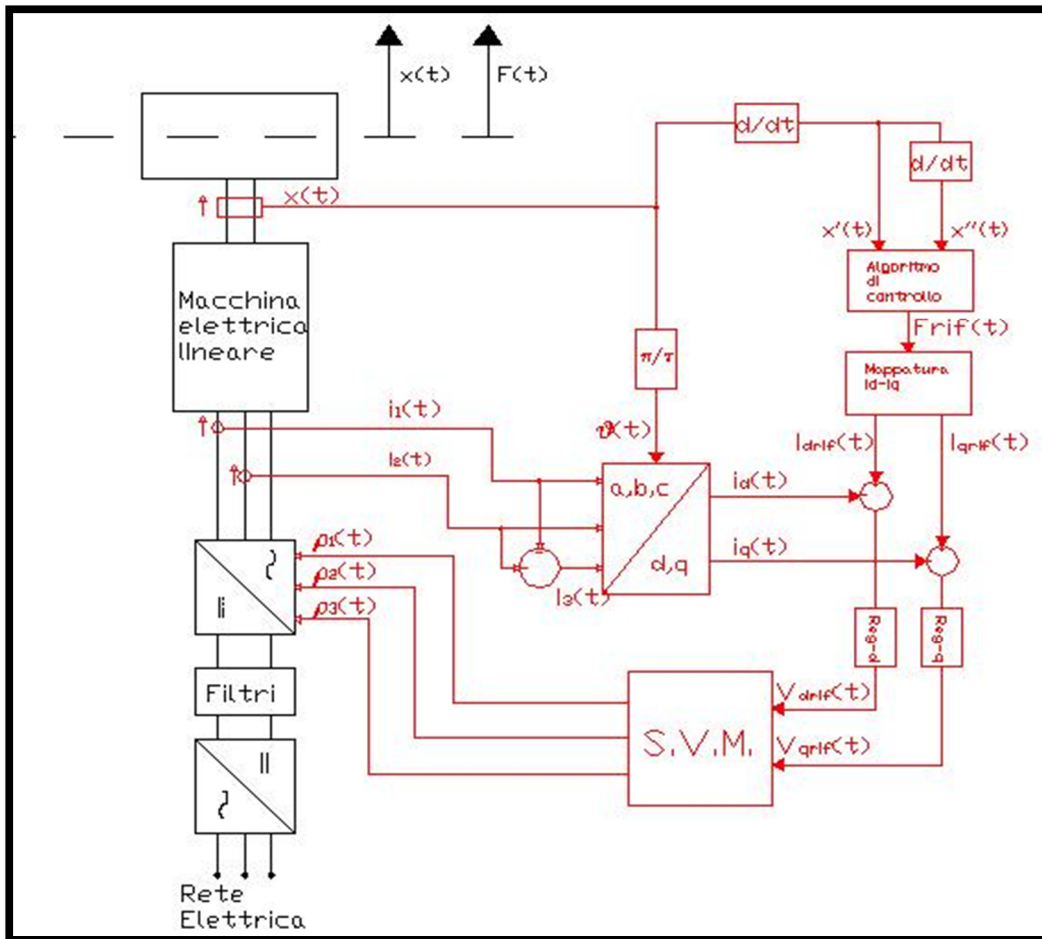


Figura 6.1-1: Architettura del sistema di controllo

L'architettura scelta prevede che un singolo point-absorber sia equipaggiato con: galleggiante, macchina elettrica, inverter. Se si va a costituire una wave-farm, cioè si mettono insieme un dato numero di point-absorber, ognuno di questi sarà costituito da questi tre elementi. La somma delle potenze sarà sul nodo in continua che a sua volta è interfacciato con la rete attraverso un raddrizzatore. La parte di controllo è composta da un blocco che rappresenta l'algoritmo di controllo, cioè attraverso una misura delle grandezze di accelerazione e velocità viene deciso il valore della forza che la macchina deve erogare con l'obiettivo di avere il massimo assorbimento di energia. Il metodo con cui realizzare questa forza è deciso dal blocco di mappatura delle correnti dal quale usciranno i riferimenti delle correnti in grandezze di Park con il quale si alimenta l'anello in corrente. Il valore

delle tensioni in uscita dal regolatore sono realizzate dall'inverter mediante la logica della Space Vector Modulation.

6.2. La space vector modulation

Una possibile logica di comando dell'inverter utilizza la tecnica della space-vector-modulation²⁰.

Il modello Matlab che si costruisce considera il blocco inverter-SVM come un sistema del primo ordine con una costante di tempo dell'ordine ($T_{inv} \sim 1 \cdot 10^{-4}$). In pratica quindi si fa l'ipotesi che il valore di tensione in uscita dal regolatore vada ai capi della macchina con un certo ritardo dovuto alla dinamica dell'azione SVM-Inverter. Questo modello molto grossolano non tiene conto dell'effettiva tensione che l'inverter va ad applicare sulla macchina, risulta in ogni caso molto efficace se non si è interessati ad aspetti di dettaglio delle forme d'onda ma si fa, come nel seguente elaborato, una modellizzazione di massima del WEC. Quindi sia in asse d che in asse q l'inverter sarà un modello del primo ordine come mostrato in Figura 6.2-1.

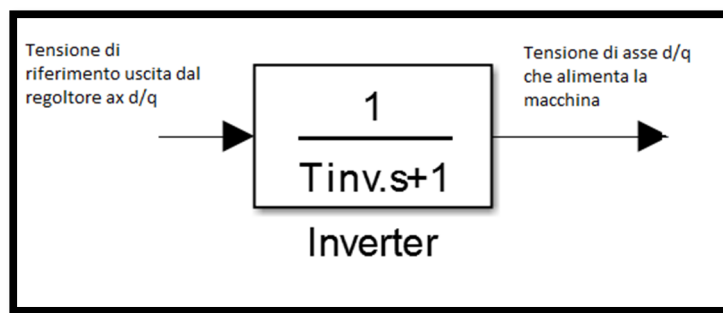


Figura 6.2-1: Modello matlab inverter-svm

²⁰ Come mostrato in Appendice 10.2

6.3. Il modello della macchina elettrica

Il modello della macchina a riluttanza variabile segue le equazioni viste in (5.29). Applicando la trasformata di Laplace otteniamo:

$$\begin{cases} V_d(s) = R_s I_d(s) + sL_d I_d(s) - \omega(s)\psi_q(s) \\ V_q(s) = R_s I_q(s) + L_q I_q(s) + \omega(s)\psi_d(s) \\ \psi_d(s) = L_d I_d(s) \\ \psi_q(s) = L_q I_q(s) \\ F_{pto}(s) = \frac{\pi}{\tau} (L_d - L_q) I_d(s) I_q(s) \end{cases} \quad (6.31)$$

Ponendo:

$$\begin{cases} V_d^*(s) \triangleq V_d(s) + \omega(s)\psi_q(s) \\ V_q^*(s) \triangleq V_q(s) - \omega(s)\psi_q(s) \end{cases} \quad (6.32)$$

Da cui:

$$\begin{cases} \frac{I_d(s)}{V_d^*(s)} = \frac{1}{Rs + sL_d} \\ \frac{I_q(s)}{V_q^*(s)} = \frac{1}{Rs + sL_q} \end{cases} \quad (6.33)$$

Quindi il regolatore fornisce i segnali di tensione V_d, V_q che sono modificati dai canali mutui considerati in prima battuta come un disturbo.

Il modello della macchina è mostrato in Figura 6.3-1. Dove la costante vale:

$$K = \frac{\pi}{\tau} (L_d - L_q) \quad (6.34)$$

Il modello così presentato è in forma parametrica, dove i parametri R_s, L_d, L_q, τ , dipenderanno dalla tipologia e taglia di macchina utilizzata. Il modello che è presentato alla fine dell'elaborato può essere di ausilio alla progettazione della stessa, cioè attraverso un'analisi F.E.M. si ricavano i coefficienti e si verifica il comportamento e le prestazioni dell'intero convertitore per l'energia ondata. Nell'elaborato ci si limiterà a mettere dei parametri trovati in letteratura al solo scopo di verificare il comportamento dell'intero sistema.

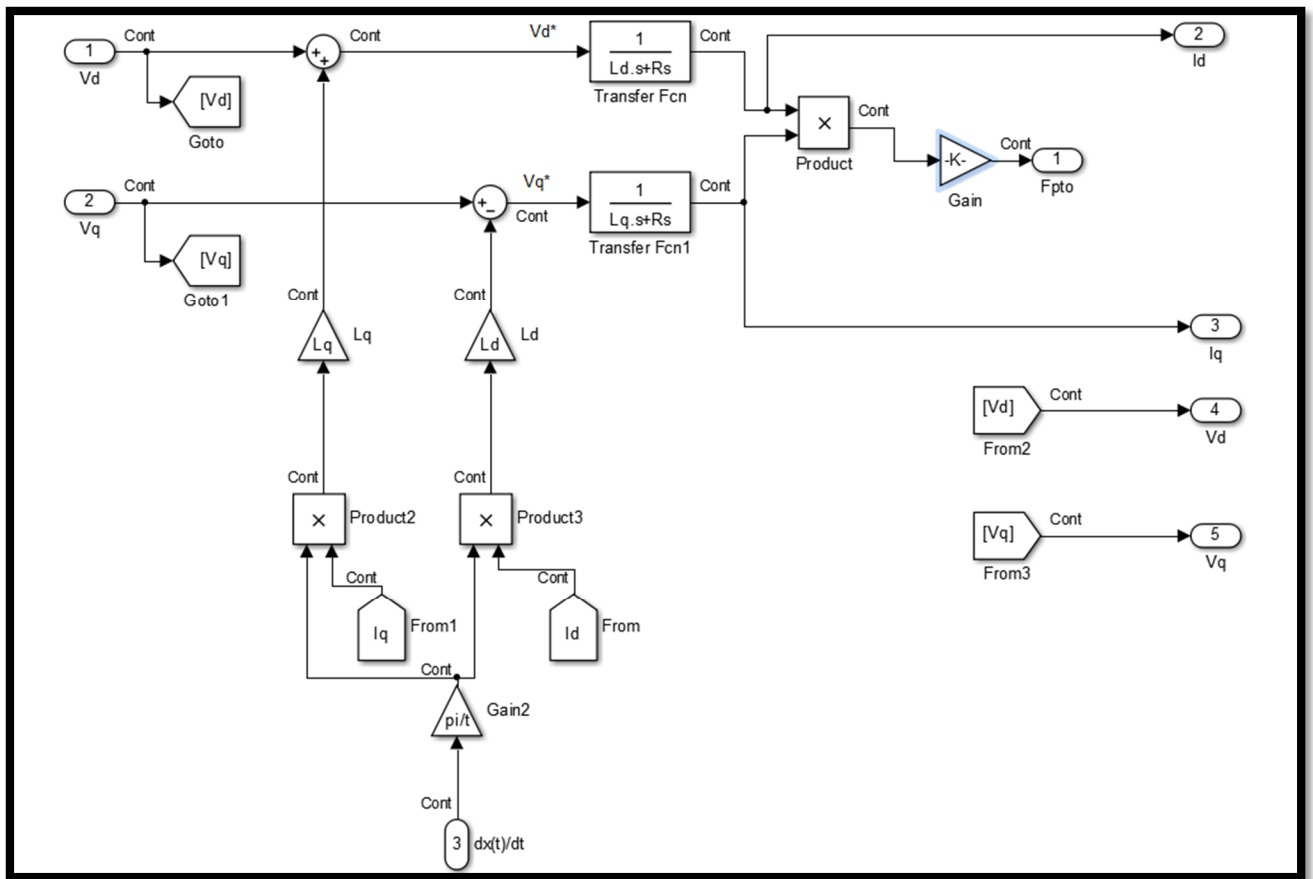


Figura 6.3-1:Modello Matlab della macchina a riluttanza variabile

Le grandezze che sono accessibili sulla macchina sono la forza, tutte le tensioni e le correnti. Si osserva che queste ultime sono in grandezze trasformate, per osservare gli andamenti reali occorre eseguire l'anti-trasformata di Park. La anti-trasformazione risulta semplicemente:

$$\begin{cases} v_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} (\cos(\vartheta(t)) v_d(t) - \sin(\vartheta(t)) v_q(t)) \\ v_b(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} (\cos(\vartheta(t) - \frac{2}{3}\pi) v_d(t) - \sin(\vartheta(t) - \frac{2}{3}\pi) v_q(t)) \\ v_c(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} (\cos(\vartheta(t) - \frac{4}{3}\pi) v_d(t) - \sin(\vartheta(t) - \frac{4}{3}\pi) v_q(t)) \end{cases} \quad (6.35)$$

Dove come già detto $\vartheta(t) = \frac{\pi}{\tau} x(t)$. Il blocco della trasformata di Park è mostrato in Figura 6.3-2.

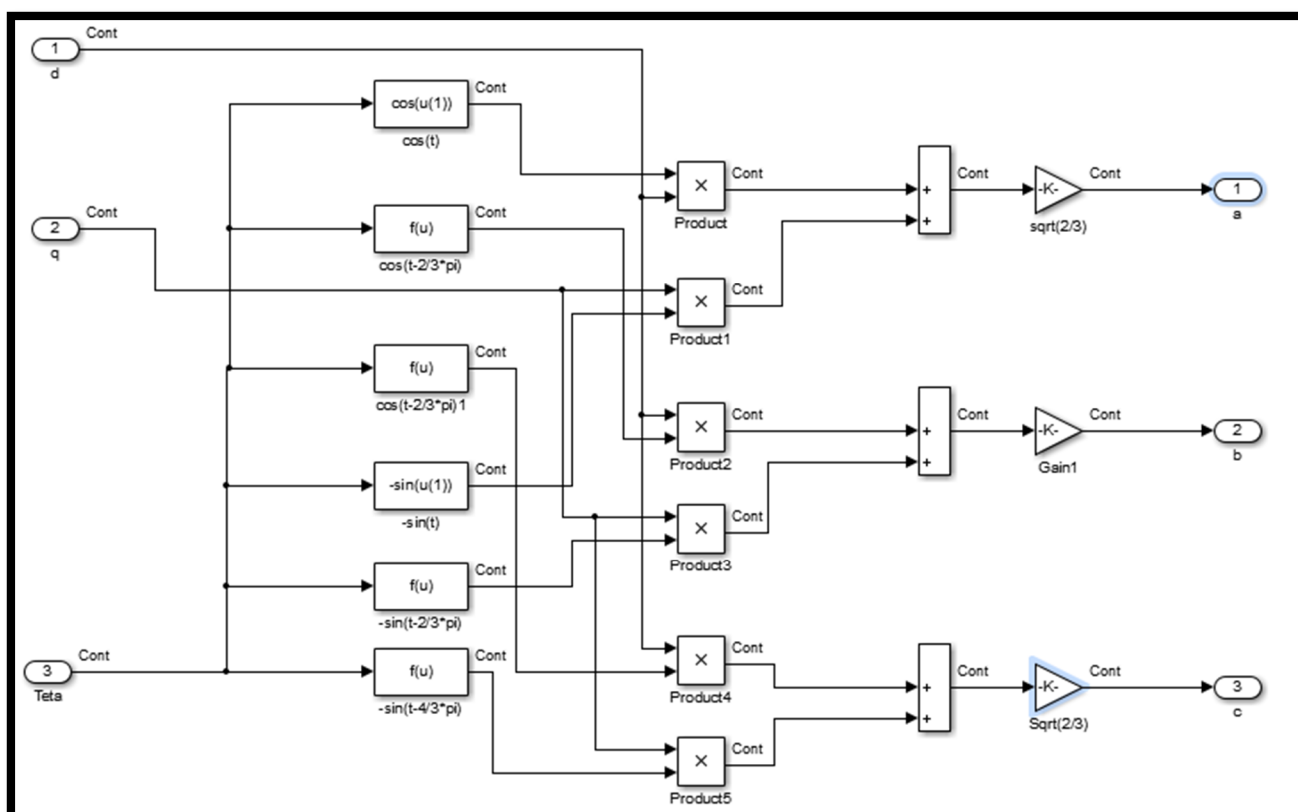


Figura 6.3-2: Blocco matlab che effettua l'anti-trasformata di Park

6.4. Il modello del galleggiante

Il modello del galleggiante si basa sull'equazione (4.1113) che può essere riscritta:

$$\frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} = \left(F_e(t) - \beta \frac{dx_3(t)}{dt} - kx_3(t) \right) \frac{1}{M} \quad (6.41)$$

Se si eseguono due successive integrazioni di questa grandezza otterremo la velocità del galleggiante e lo spostamento dello stesso. Ricordo che la forza di eccitazione è la somma della forza dovuta all'onda incidente con quella fornita dalla macchina. Il modello è mostrato in Figura 6.4-1.

Anche in questo caso come per la macchina elettrica i coefficienti dipendono dal tipo di galleggiante che si intende utilizzare (anche in questo caso può essere necessario l'ausilio di metodi F.E.M.). Il modello che si costruisce può essere di ausilio alla progettazione per valutarne le eventuali dimensioni o per stabilire la migliore combinazione galleggiante/macchina elettrica.

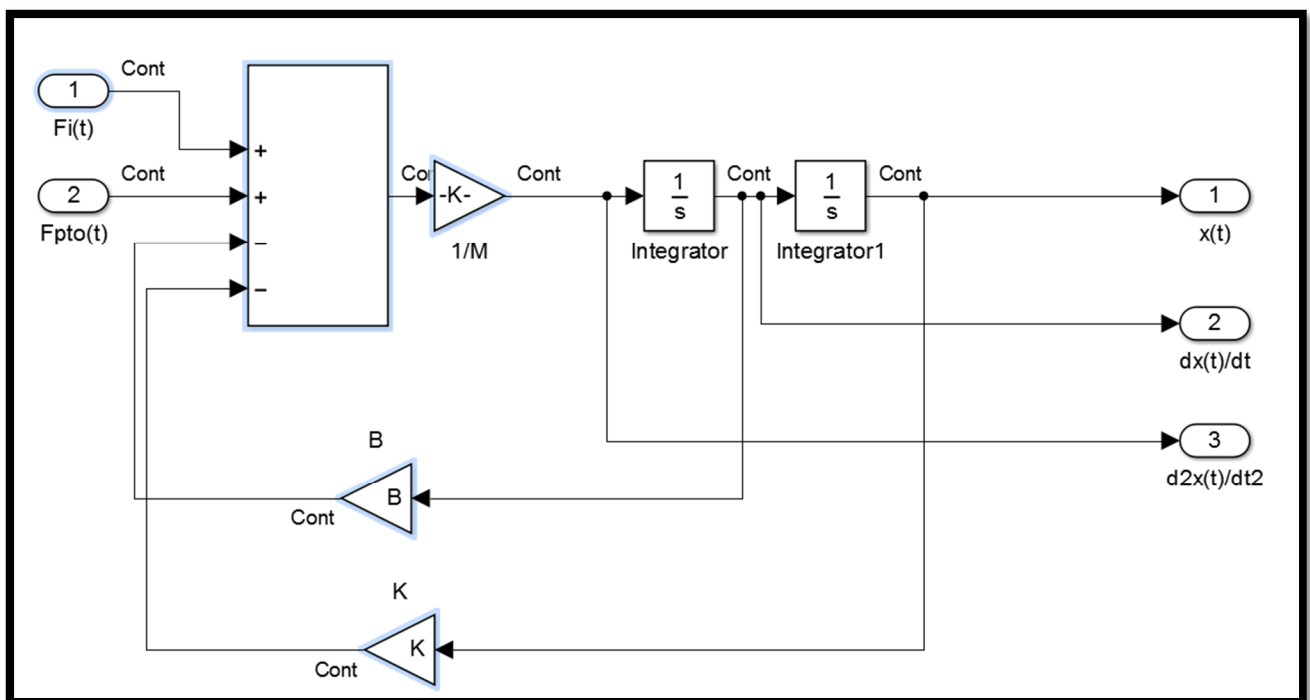


Figura 6.4-1: Modello Matlab del galleggiante

6.5. Il progetto dei regolatori di corrente

In questo paragrafo si stabiliscono i parametri da inserire all'interno dei regolatori di corrente. Come mostrato in Figura 6.1-1 si osserva come le correnti di riferimento decise dal blocco mappatura Id-Iq vadano di fatto a costituire un anello interno di corrente. Il problema in schemi a blocchi è mostrato in Figura 6.5-1.

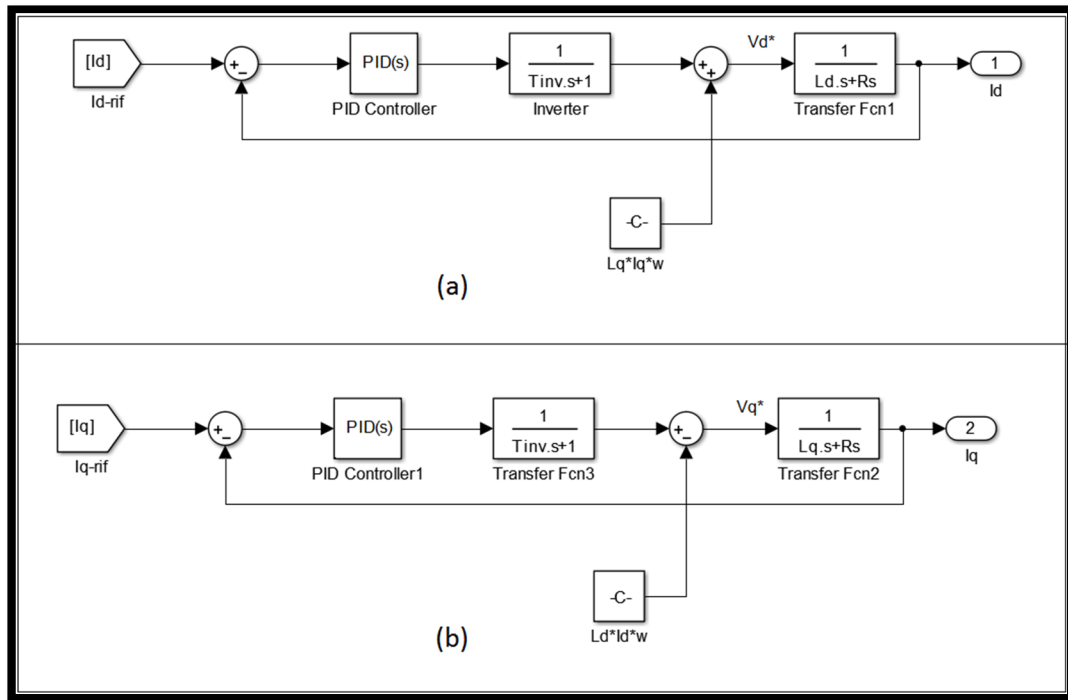


Figura 6.5-1: Anello di corrente di asse d (a) anello di corrente di asse q (b)

Si può osservare come gli schemi a blocchi si equivalgono formalmente a meno di un segno sui canali mutui. In prima battuta per il progetto del regolatore si ipotizza che i canali mutui siano trascurabili. Svolgendo la simulazione si guarderà come si comporta il sistema a causa di questa approssimazione e si valuterà la eventuale necessità di un blocco di compensazione.

Data l'uguaglianza formale dei due schemi a blocchi si svolge il calcolo per il solo asse d. Il metodo che si utilizza per la progettazione del regolatore è chiamato Magnitude-Optimun. Prendiamo un regolatore proporzionale integrale del tipo:

$$PI(s) = K_{pd} \frac{(sT_{id} + 1)}{sT_{id}} \quad (6.51)$$

Il metodo consiste nel cancellare con lo zero del PI la costante di tempo più grande, nel presente caso quindi:

$$T_{id} = \frac{L_d}{R_s} \quad (6.52)$$

Compiendo questa scelta il sistema in catena diretta diventa:

$$G(s) = K_{pd} \frac{(s \frac{L_d}{R_s} + 1)}{s \frac{L_d}{R_s}} \frac{1}{(1 + sT_{inv})} \frac{1}{R_s(1 + s \frac{L_d}{R_s})} = \frac{K_{pd}}{sL_d(1 + sT_{inv})} \quad (6.5-3)$$

Il passo successivo che prevede la tecnica è di calcolare il sistema in catena chiusa e di andarne a tracciare il diagramma di Bode. Verrà scelto dunque il valore del guadagno proporzionale (K_p) che consente di avere la funzione con modulo unitario e per la più larga banda possibile. Il sistema in catena chiusa diventa:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{(1 + \frac{L_d}{K_{pd}}s + \frac{L_d T_{inv}}{K_{pd}}s^2)} \quad (6.54)$$

Il sistema è quindi un sistema del secondo ordine che presenta la tipica risposta in frequenza come mostrato in Figura 6.5-2. La sua funzione di trasferimento in forma di Bode è del tipo:

$$W(s) = \frac{1}{(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2})} \quad (6.55)$$

Dalla Figura 6.5-2 si nota come per un valore di smorzamento pari ad:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7 \quad (6.56)$$

Consente di avere un sistema con una larga banda a modulo unitario. Uguagliando i termini della (6.54) con la (6.55) otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{L_d T_{inv}}{K_{pd}} \\ \frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{L_d}{K_{pd}} \end{cases} \quad (6.57)$$

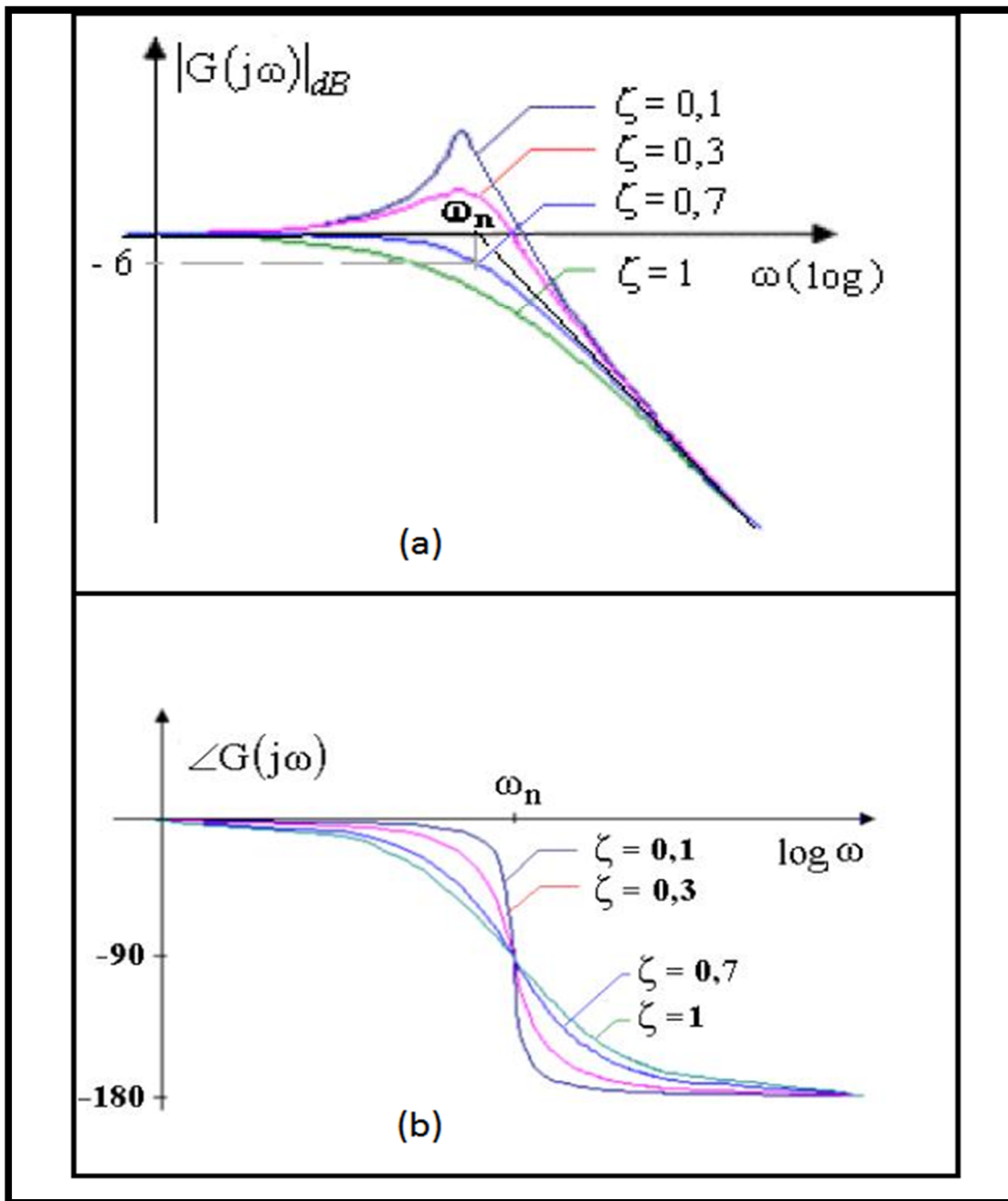


Figura 6.5-2: Diagramma di bode del sistema del secondo ordine (a) ampiezza (b) fase

Da cui risolvendo ottengo tutte le grandezze necessari per determinare il regolatore:

$$\begin{cases} K_{pd} = \frac{L_d}{2T_{inv}} \\ \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}T_{inv}} \\ T_{id} = \frac{L_d}{R_s} \end{cases} \quad (6.58)$$

Semplicemente cambiando i pedici avremo i parametri del regolatore di asse-q.

$$\begin{cases} K_{pq} = \frac{L_q}{2T_{inv}} \\ \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}T_{inv}} \\ T_{iq} = \frac{L_q}{R_s} \end{cases} \quad (6.59)$$

Con questa tecnica per frequenze inferiori ad $0.3-0.5 \omega_n$ è possibile considerare l'intero sistema in catena chiusa come un sistema del primo ordine del tipo:

$$W(s) \cong \frac{1}{1 + \frac{L_d}{K_{pd}} s} = \frac{1}{1 + 2T_{inv}s} \quad (6.510)$$

Quindi c'è da aspettarsi che per segnali lentamente variabili rispetto alle costanti di tempo in gioco il segnale del riferimento sia replicato in uscita in maniera quasi imperturbata.

Una volta progettato il regolatore in forma analogica è possibile porlo anche in forma digitale seguendo uno schema del tipo mostrato in Figura 6.5-3²¹.

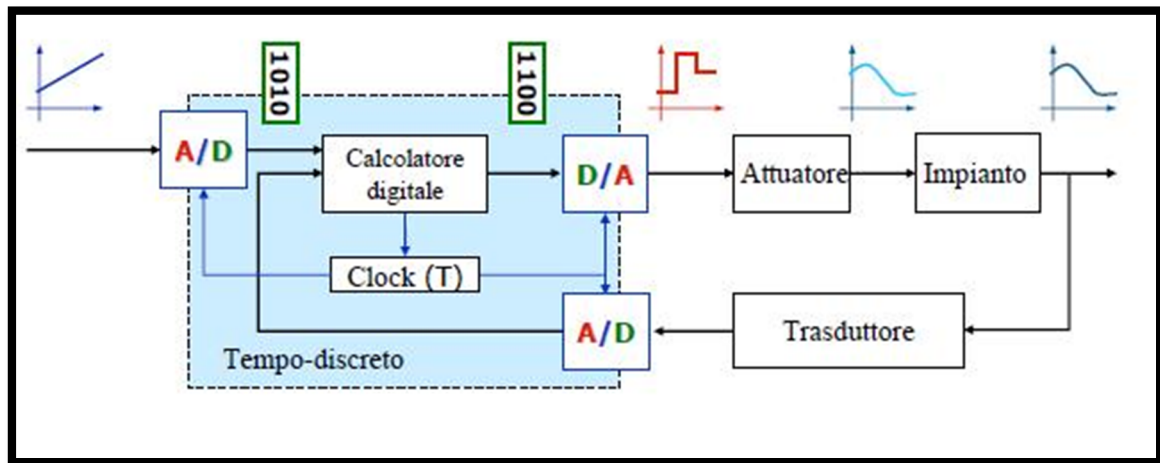


Figura 6.5-3: Architettura di un sistema di controllo digitale

I dati vengono elaborati in forma digitale, cioè il microprocessore è in grado di operare con ingressi e uscite che sono dei bit. Per questo motivo deve essere interfacciato con i segnali analogici mediante dei convertitori analogico digitali. Il convertitore digitale analogico è un campionatore, cioè un oggetto che

²¹ Come mostrato in [L.Biagiotti]

dato in ingresso di tipo tempo-continuo lo trasforma in un ingresso di tipo tempo-discreto replicando il valore dell'ingresso in determinati istanti di tempo individuati dal periodo di campionamento.

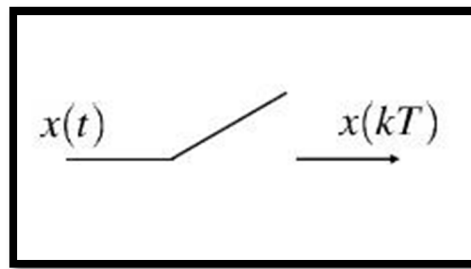


Figura 6.5-4: Campionatore

Come si osserva dalla Figura 6.5-4 l'uscita dal campionatore sarà una successione di impulsi ai vari istanti kT per k che andrà da zero all'infinito come mostrato in Figura 6.5-5.

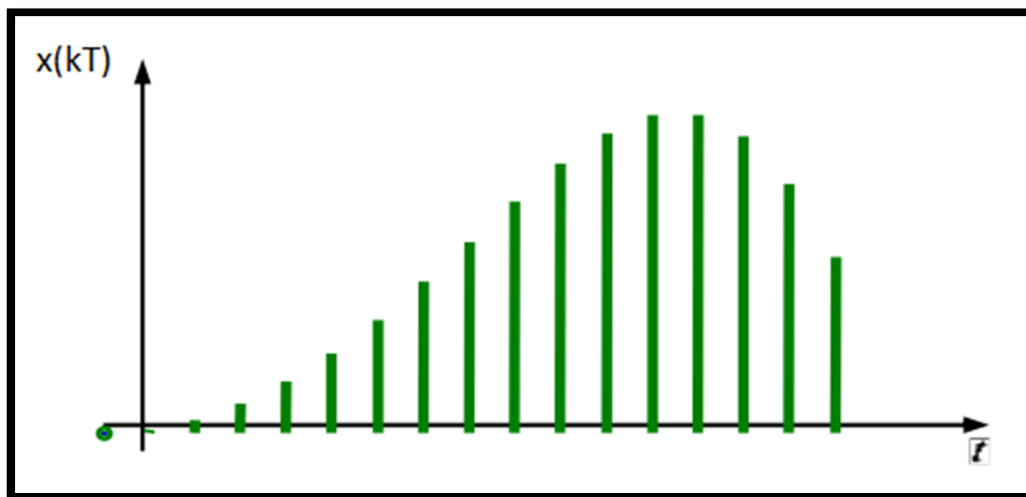


Figura 6.5-5: Segnale campionato

La conversone da analogico a digitale invece avviene nella maggior parte dei casi attraverso uno Z.O.H. (Zero Order Hold). Questo dispositivo alla quale giunge la successione discreta elaborata dal processore approssima l'uscita con una funzione tempo-continua. L'uscita viene mantenuta costante al valore dell'impulso per tutto il tempo di campionamento come mostrato in Figura 6.5-6.

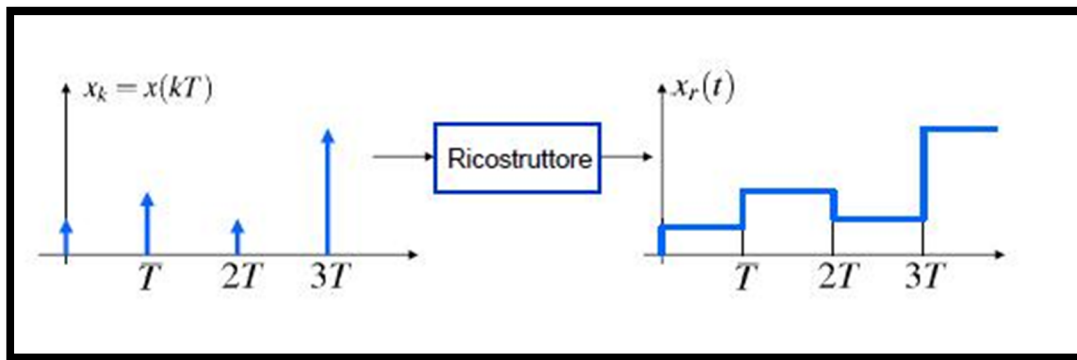


Figura 6.5-6: Funzione svolta da uno ZOH

Il tempo di campionamento per l'acquisizione dei dati del campionatore e di cambiamento dell'uscita dello ZOH è fornito da un clock, i dispositivi funzionano generalmente in modo sincronizzato. La scelta del tempo di campionamento risulta decisiva per il corretto funzionamento del dispositivo. Le regole pratiche per la scelta del tempo di campionamento sono essenzialmente due:

1. $T = \frac{2\pi}{\rho_m} \frac{1}{10}$
2. $T = \frac{2\pi}{\omega_b} \frac{1}{10}$

Dove ρ_m rappresenta il massimo modulo degli autovalori della matrice dinamica del sistema che devo controllare, mentre ω_b ne rappresenta la banda passante a tre dB. Quando si effettua un campionamento si desidera mantenere una certa "quantità" di informazione. L'evoluzione dinamica di un sistema dipende dai modi propri del sistema stesso che a loro volta dipenderanno dagli autovalori. Se si prende ad esempio una coppia di poli complessi coniugati con parte reale negativa il modo proprio che si genererà sarà una funzione che oscilla ad una frequenza che coincide grosso modo con la parte immaginaria, smorzata secondo un esponenziale negativo causato dalla parte reale. L'informazione è caratterizzata dall'ampiezza e dalla frequenza può quindi essere sintetizzata nell'autovalore. Con la scelta n.1 si prende l'informazione di tutti gli autovalori perché si considera l'autovalore dominante, cosa che non accade con la seconda scelta. La scelta dipenderà da vincoli tecnici ed economici.

In questo elaborato trascuriamo l'effetto della quantizzazione, cioè l'informazione che si perde quando si rappresenta un impulso di una grandezza continua (quindi in corrispondenza biunivoca con i numeri reali) con una sequenza di bit.

Per determinare l'algoritmo da implementare sul controllore la sintesi deve essere fatta nel dominio discreto attraverso l'applicazione della Z-trasformata. Il sistema continuo interfacciato con campionatore ed uno ZOH è un sistema discreto lineare stazionario, quindi una possibile tecnica è quella di trasformare l'intero sistema in un sistema discreto ed in seguito progettare il regolatore nel

dominio Z. Una altra tecnica consiste nel trasformare la funzione di trasferimento tempo-continua del controllore in una sua forma approssimata tempo-discreta. Seguendo questa seconda via si suppone di avere una funzione di trasferimento del controllore del tipo:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (6.511)$$

Dove per avere un sistema causale è necessario avere $m < n$. La funzione di trasferimento in variabile discreta che meglio approssima il sistema dinamico di (6.511) è ottenuta mediante la tecnica di Tuistin:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \quad (6.512)$$

Per concludere la parte relativa al controllo digitale si introduce la tecnica con cui si passa dalla funzione di trasferimento discreta all'algoritmo da implementare sul microcontrollore. Sia la funzione di trasferimento del controllore del tipo:

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (6.513)$$

Si dimostra che l'algoritmo con cui procederà il microprocessore vale²²:

$$y(k) = -y(k-n)a_0 - \dots y(k-1)a_{n-1} + u(k-n)b_0 + \dots u(m+k-n)b_m \quad (6.5-14)$$

Quindi noti i coefficienti della funzione di trasferimento discreta conosco l'algoritmo con cui deve regolare gli impulsi il microprocessore.

Riferendoci al caso in esame Matlab esegue automaticamente la conversione da analogico a digitale, le informazioni di cui necessita per compiere queste operazioni sono la scelta della tecnica di discretizzazione (nel nostro caso tecnica di Tuistin), ed il tempo di campionamento che utilizzando la prima regola sopracitata diventa:

$$T = \frac{2\pi}{\rho_m 10} = \frac{2\pi}{\frac{1}{T_{inv}} 10} \quad (6.515)$$

²² Come mostrato in appendice 0

6.6. La mappatura delle correnti

Le correnti che fungono da riferimento dei regolatori devono avere un valore tale da riuscire a verificare la forza richiesta dal blocco del controllo ottimo:

$$I_{drif}(t)I_{qrif}(t) = \frac{Frif(t)}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)} \quad (6.61)$$

Se si fissa un generico istante di tempo la funzione sopra nelle variabili correnti di riferimento determina una iperbole equilatera. In seguito si osserva che la forza di riferimento ha un andamento alternativo, quindi ci saranno istanti di tempo in cui il prodotto delle due correnti sarà positivo ed istanti in cui il prodotto delle due correnti sarà negativo come mostrato in Figura 6.6-1.

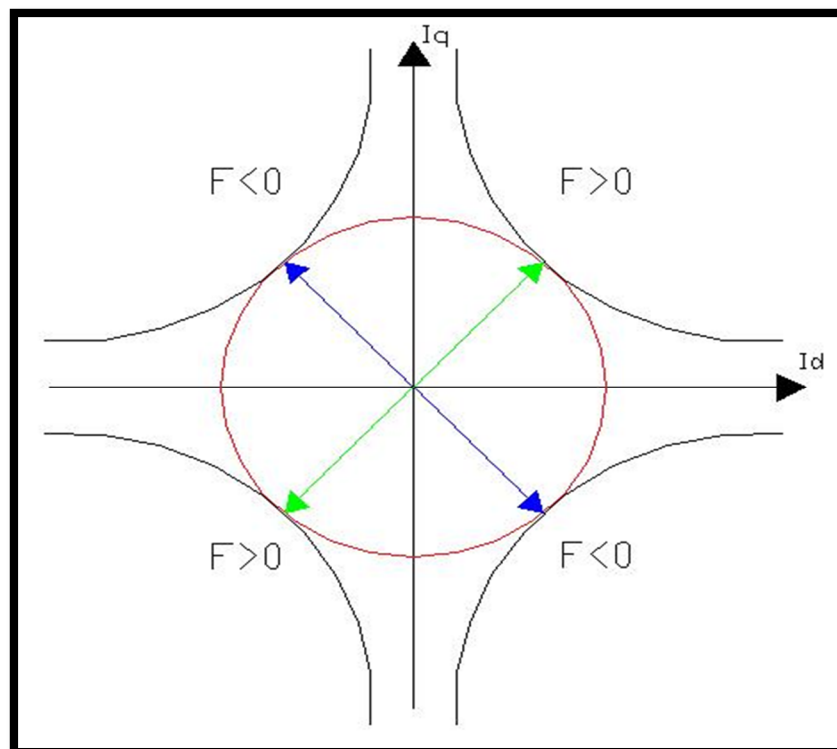


Figura 6.6-1: Mappatura delle correnti sul piano Id-Iq

Fissato un istante di tempo esistono infinite combinazioni di Id-Iq per realizzare una determinata forza. Dato che il modello della macchina prende in considerazione le sole perdite per effetto Joule prendiamo il valore della corrente che minimizza queste perdite. Una volta progettata la macchina e il galleggiante, la mappatura di Id-Iq dovrà inglobare tutti i vincoli per evitare che il sistema si danneggi.

Se $Frif(t)$ è maggiore di zero sono possibili entrambe le scelte rappresentate dai vettori verdi di Figura 6.6-1. Nel seguente elaborato si sceglie il caso in cui entrambe le correnti sono positive. Se $Frif(t)$ è minore di zero, invece sono possibili le scelte rappresentate dai vettori in azzurro di Figura 6.6-1, di seguito è indicata la scelta con I_d positiva ed I_q negativa. In termini analitici:

$$\begin{cases} id(t) = iq(t) = \sqrt{\frac{Frif(t)}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)}} & Frif(t) > 0 \\ id(t) = \sqrt{\frac{|Frif(t)|}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)}} & iq(t) = -\sqrt{\frac{|Frif(t)|}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)}} & Frif(t) < 0 \end{cases} \quad (6.62)$$

I ragionamenti fatti fino ad ora si riferiscono al caso in cui $Ld > Lq$ altrimenti valgono considerazioni opposte.

Il modello Matlab che realizza quanto detto è mostrato in Figura 6.6-2.

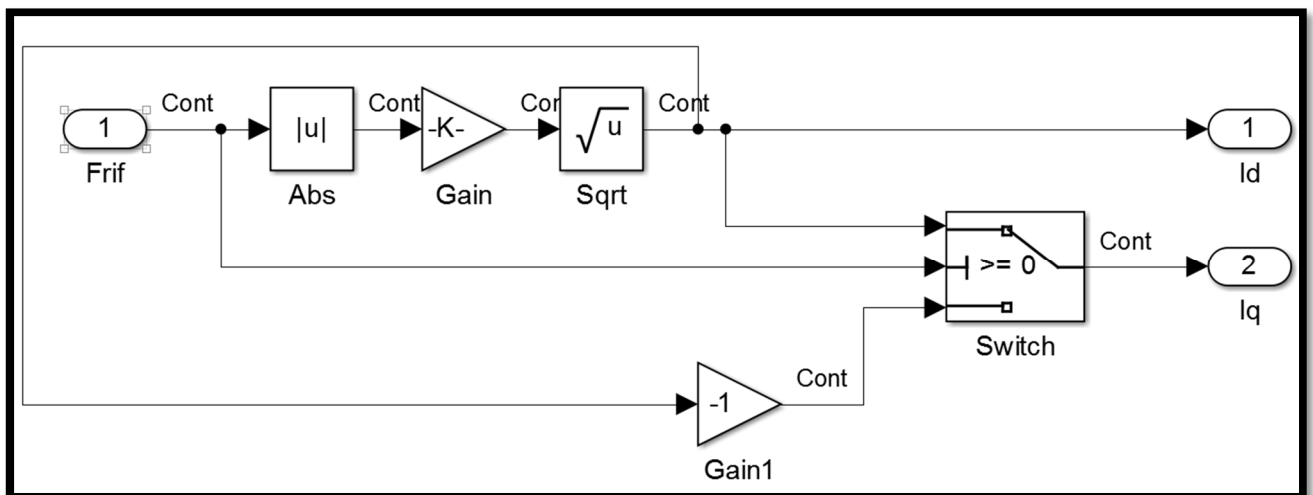


Figura 6.6-2: Modello Matlab del blocco mappatura Id-Iq

Una mappatura delle correnti così scelta comporta però problemi di divergenza nelle tensioni di Park, il termine di asse diretto infatti contiene la derivata della corrente di asse diretto che vale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_d(t)}{dt} = \frac{d \sqrt{\frac{\pi}{\tau} (Ld - Lq) Frif(t)}}{dt} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\pi}{\tau} (Ld - Lq)}} \frac{\pi}{\tau} (Ld - Lq) \frac{dFrif(t)}{dt} \quad Frif(t) > 0 \\ \frac{di_d(t)}{dt} = \frac{d \sqrt{\frac{\pi}{\tau} (Ld - Lq) (-Frif(t))}}{dt} = \frac{-1}{2 \sqrt{\frac{\pi}{\tau} (Ld - Lq)}} \frac{\pi}{\tau} (Ld - Lq) \frac{dFrif(t)}{dt} \quad Frif(t) < 0 \end{array} \right. \quad (6.63)$$

La funzione rappresentativa della forza, in generale sarà alternativa e se si va a calcolare il limite destro e sinistro della funzione (6.63) rispetto all'istante di tempo t^* in cui:

$$Frif(t^*) = 0 \quad (6.64)$$

Si hanno due limiti divergenti di segno opposto (punto di cuspidè), ovviamente prima del punto t^* avremo una derivata della forza negativa (funzione decrescente), oltrepassato tale valore invece la derivata sarà positiva (funzione crescente).

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow t^{*-}} \frac{di_d(t)}{dt} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow t^{*-}} \frac{di_d(t)}{dt} = -\infty \end{array} \right. \quad (6.65)$$

Lo stesso problema si presenta nella tensione di asse-q con segni entrambi positivi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow t^{*-}} \frac{di_d(t)}{dt} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow t^{*-}} \frac{di_d(t)}{dt} = +\infty \end{array} \right. \quad (6.66)$$

Questo comportamento è confermato dalla simulazione, se si sottopone il sistema di Figura 6.6-2 a mappare una forza sinusoidale si ottiene:

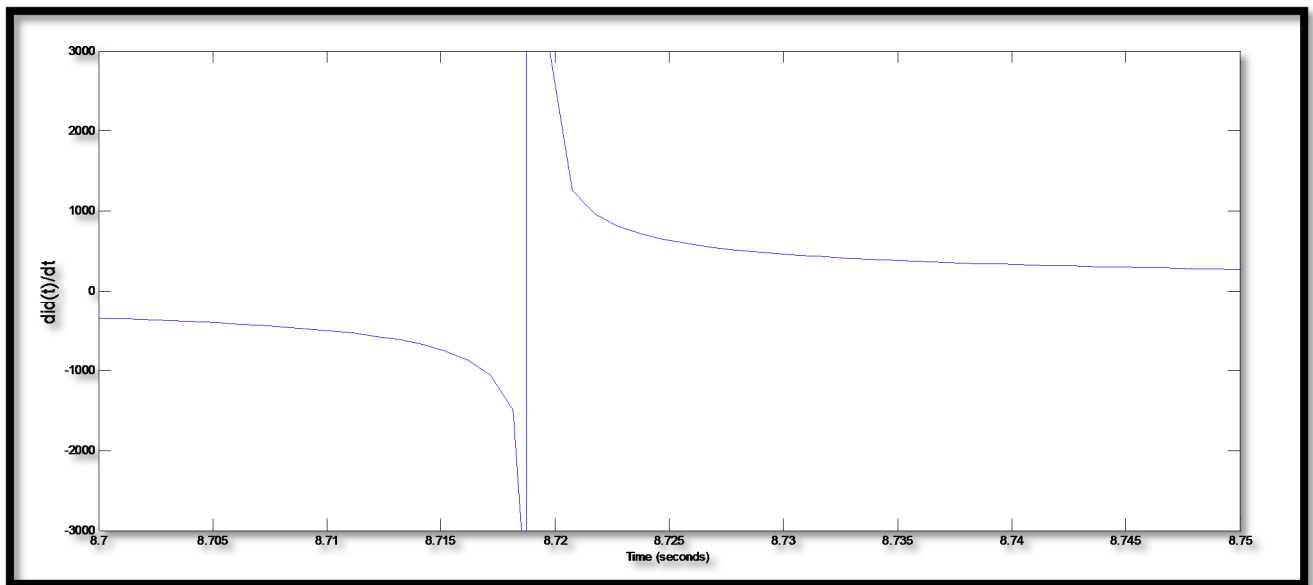


Figura 6.6-3: Divergenza del termine induttivo di asse-d

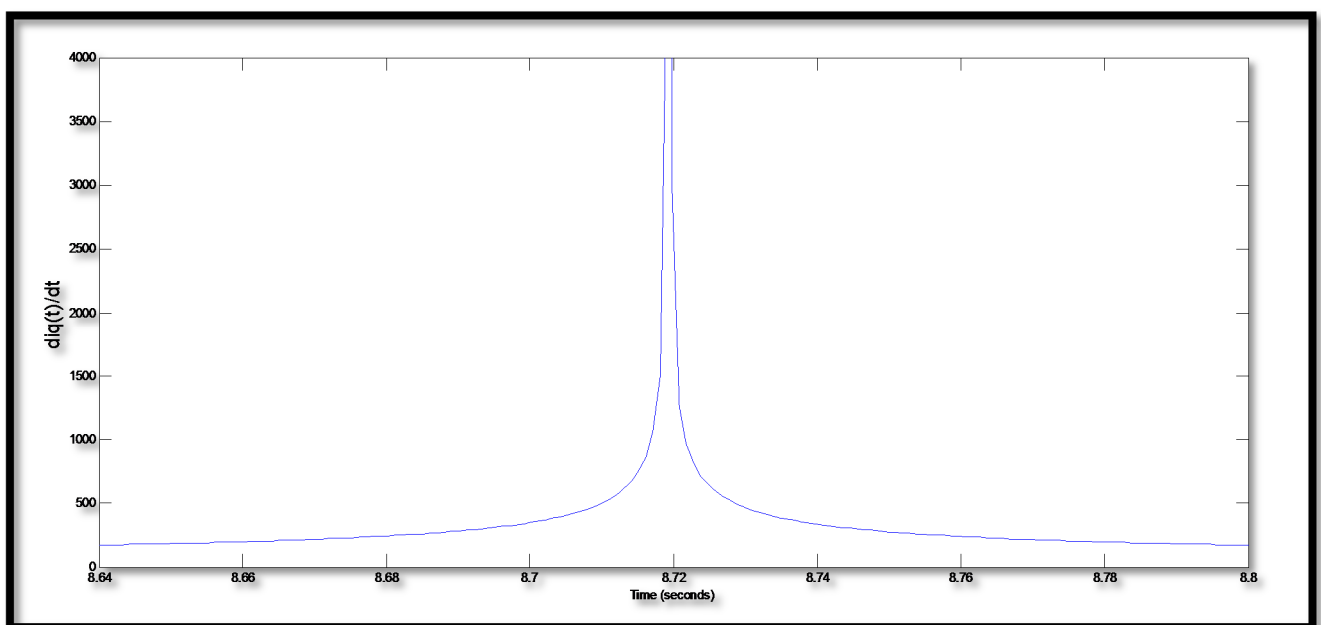


Figura 6.6-4: Divergenza del termine induttivo di asse-q

Se la mappatura avvenisse in questo modo si avrebbe un periodico intervento della saturazione dei regolatori, ed il mancato inseguimento della forza ottima da parte della macchina per determinati intervalli di tempo.

Si propone quindi una mappatura alternativa, in primo luogo si scriveranno le correnti come funzioni della forza di riferimento. In base al valore assunto dalla forza di riferimento le correnti assumeranno diversi tipi di funzione. I valori della forza di riferimento sono confrontati con un parametro definito dall'utente esterno (e):

$$\begin{cases} F_{rif} \geq e \\ F_{rif} \leq -e \\ -e < F_{rif} < e \end{cases} \quad (6.67)$$

Nei primi due tratti identificati in (6.67) la mappatura della corrente segue il punto di minime perdite come fatto per la precedente mappatura:

$$\begin{cases} id = iq = \sqrt{\frac{F_{rif}}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)}} & F_{rif} \geq e \\ id = \sqrt{\frac{-F_{rif}}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)}} \quad iq = -\sqrt{\frac{-F_{rif}}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)}} & F_{rif} \leq -e \end{cases} \quad (6.68)$$

Nel tratto centrale identificato in (6.67) si vuole realizzare la forza di riferimento, ma non più con la mappatura ottimale per le perdite, perché farebbe divergere la tensione induttiva. Inoltre essendo le correnti variabili di stato desidero che assumano un andamento continuo. Per semplicità di notazione si pone:

$$k = \frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq) \quad (6.69)$$

Il problema che deve essere risolto è trovare la funzione della corrente di asse diretto tale che verifichi i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} iq(F_{rif}) = \frac{F_{rif}}{id(F_{rif})k} \\ \lim_{F_{rif} \rightarrow +e^-} id(F_{rif}) = id(e) = \sqrt{\frac{e}{k}} \\ \lim_{F_{rif} \rightarrow -e^+} id(F_{rif}) = id(-e) = \sqrt{\frac{e}{k}} \\ \lim_{F_{rif} \rightarrow +e^-} iq(F_{rif}) = iq(e) = \sqrt{\frac{e}{k}} \\ \lim_{F_{rif} \rightarrow -e^+} iq(F_{rif}) = iq(-e) = -\sqrt{\frac{e}{k}} \end{cases} \quad (6.610)$$

E' facilmente verificabile che soddisfatti i primi tre vincoli di (6.610) sono automaticamente verificati gli ultimi due. Quindi con le condizioni di raccordo si verifica che la funzione rimanga continua nei

punti di frontiera del tratto centrale mostrato in (6.67). Si prenderà una funzione continua anche nell'intervallo centrale ad esempio:

$$id(F) = aFrif^2 + b \quad (6.611)$$

Dove le incognite sono a e b, si osserva che essendo la funzione a simmetria pari rispetto all'asse $F=0$ la seconda e la terza condizione di (6.610) sono sicuramente verificate. Una funzione del tipo (6.611) garantisce un ulteriore grado di libertà che viene usato per garantire la continuità della derivata in e:

$$\lim_{Frif \rightarrow e^-} \frac{did(Frif)}{dFrif} = \lim_{Frif \rightarrow e^+} \frac{did(Frif)}{dFrif} = \frac{1}{2\sqrt{ek}} \quad (6.612)$$

La sola verifica di questa condizione si può dimostrare che rende continue le derivate delle funzioni id ed iq su tutti i punti di frontiera del tratto centrale di (6.67).

Quindi i coefficienti possono essere calcolati imponendo:

$$\begin{cases} ae^2 + b = \sqrt{\frac{e}{k}} \\ 2ae = \frac{1}{2\sqrt{ek}} \end{cases} = \begin{cases} a = \frac{1}{4\sqrt{e^3k}} \\ b = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{e}{k}} \end{cases} \quad (6.613)$$

Nella Figura 6.6-5 e nella Figura 6.6-6 sono mostrati gli andamenti nei tratti più significativi della correnti con la vecchia mappatura e con la nuova. Quindi riepilogando la funzione che il blocco di mappatura delle correnti deve eseguire vale:

$$\begin{cases} id = iq = \sqrt{\frac{Frif}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)}} & Frif \geq e \\ id(F) = aFrif^2 + b \quad iq(Frif) = \frac{Frif}{(aFrif^2 + b)\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)} & -e < Frif < e \\ id = \sqrt{\frac{-Frif}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)}} \quad iq = -\sqrt{\frac{-Frif}{\frac{\pi}{\tau}(Ld - Lq)}} & Frif \leq -e \end{cases} \quad (6.614)$$

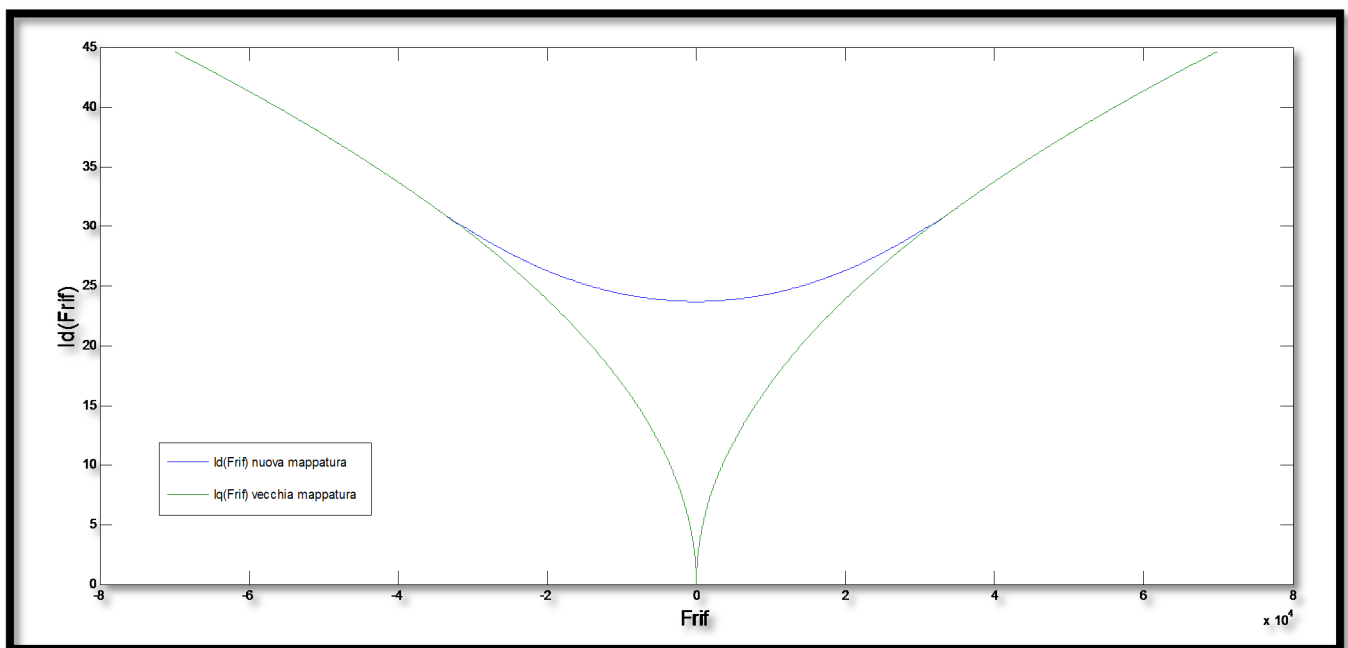


Figura 6.6-5: Vecchia mappatura di I_d (verde) e nuova (blu)

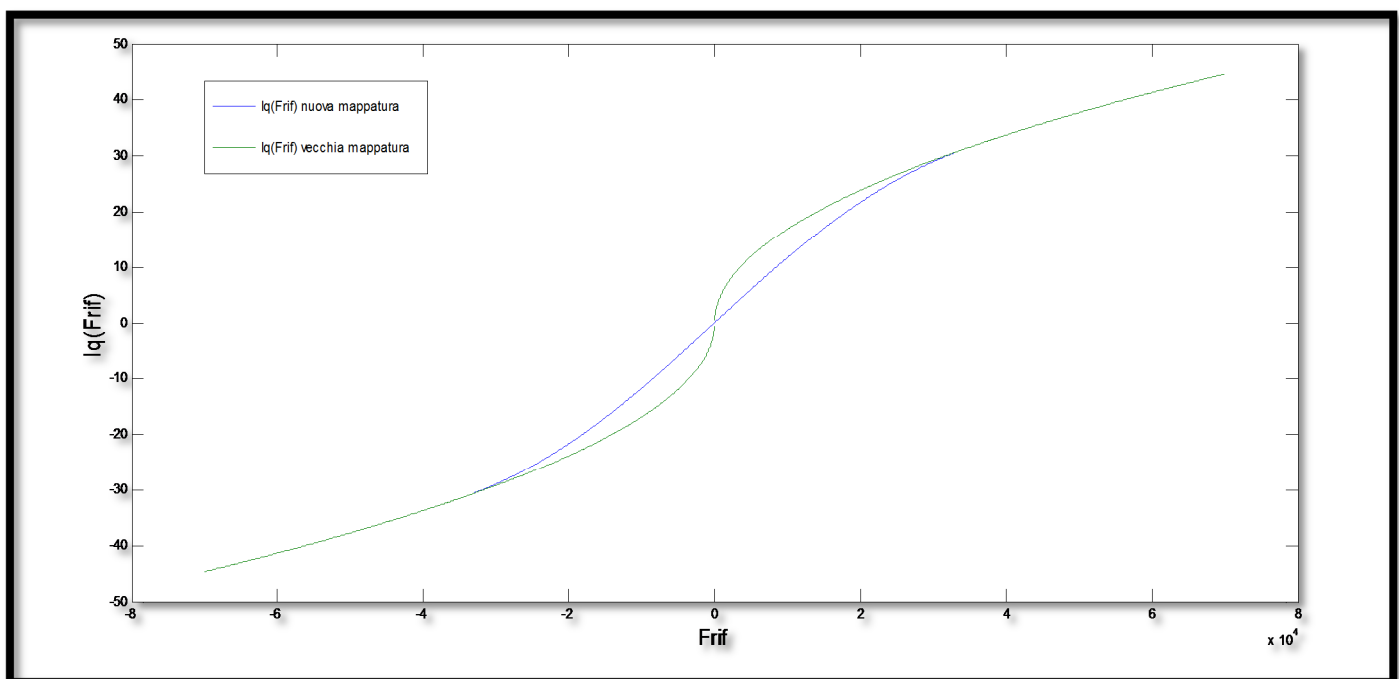


Figura 6.6-6: Vecchia mappatura di I_q (verde) e nuova (blu)

Il modello Matlab è quindi modificato come mostrato in Figura 6.6-7. La funzione descritta in (6.614) è stata realizzata mediante una serie di commutatori dei quali il numero uno e il numero due sono attivi (cioè realizzano il collegamento disegnato nello schema) quando la forza di riferimento è superiore al parametro (e), mentre il numero tre e il numero quattro sono attivi quando la forza è maggiore del valore ($-e$). Il parametro (e) è un parametro che può essere impostato dall'esterno, tanto

maggiore sarà il suo valore tanto più basso sarà il picco di tensione induttiva, questo a scapito di maggiori perdite.

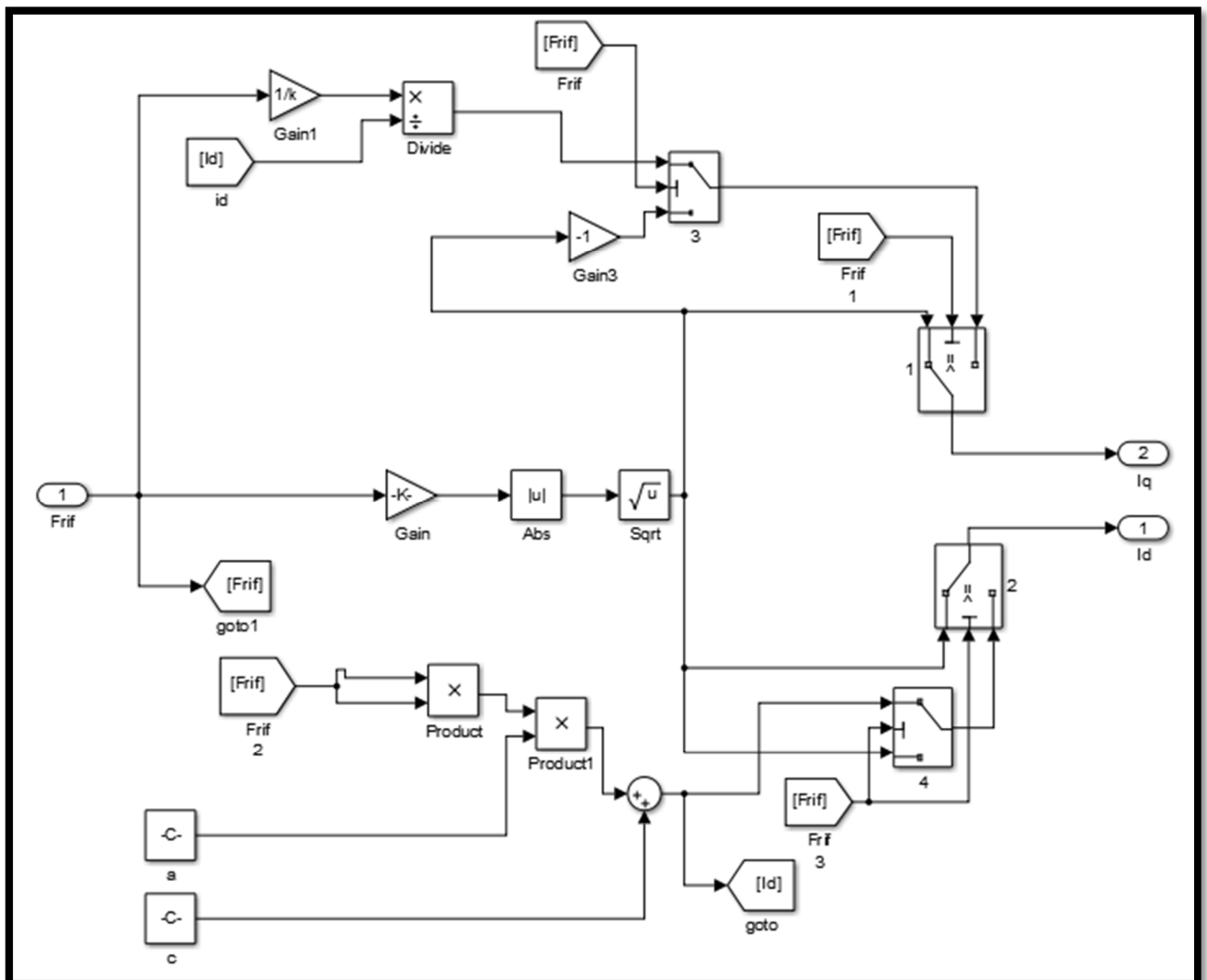


Figura 6.6-7: Nuovo blocco per la mappatura delle correnti

Se sottoponiamo il sistema di Figura 6.6-7 a mappare una forza di riferimento sinusoidale si ottengono delle funzioni continue e limitate dei termini di tensione induttiva come mostrato in Figura 6.6-8 e Figura 6.6-9.

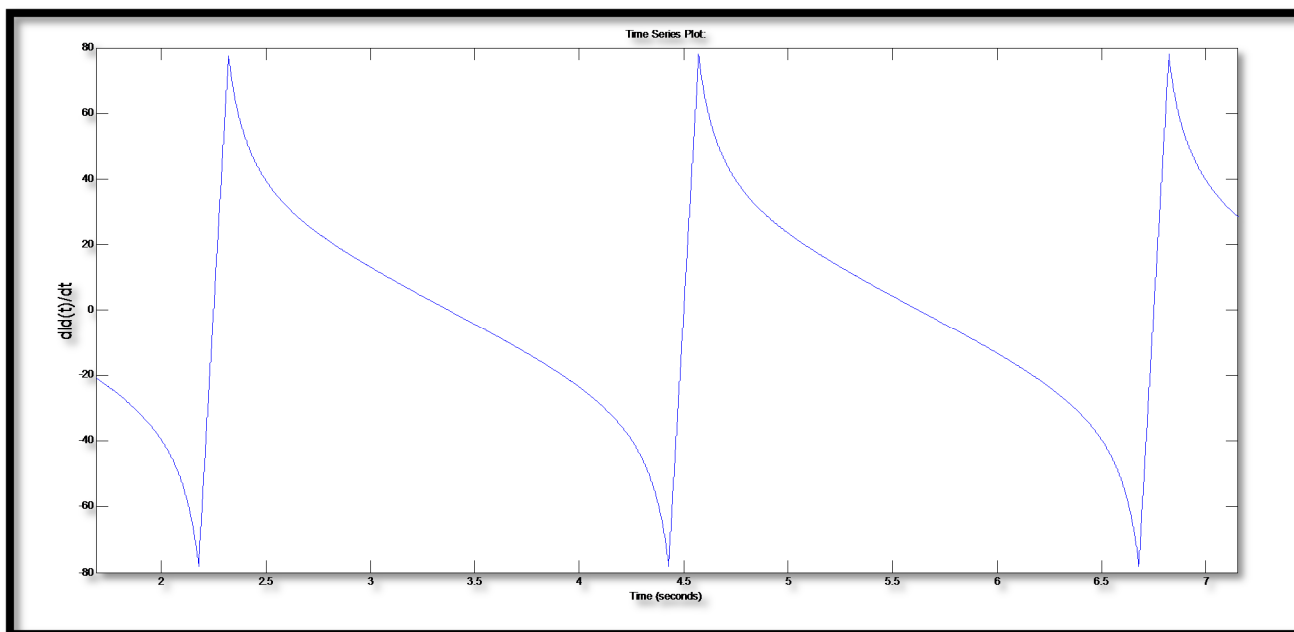


Figura 6.6-8: Termine induttivo di asse diretto

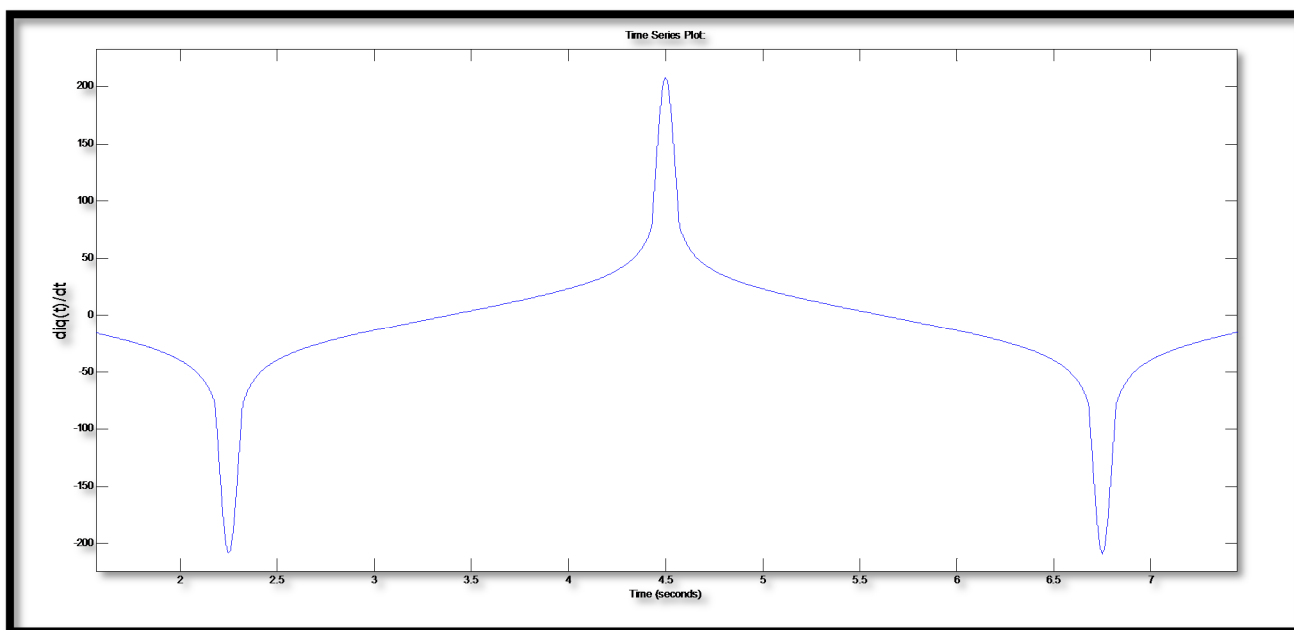


Figura 6.6-9: Termine induttivo di asse quadratura

6.7. L'algoritmo di controllo

Il criterio con cui si decide il valore della forza che istante per istante il generatore deve trasmettere al galleggiante si basa sul massimizzare l'energia estratta dall'onda²³. Si ricorda l'equazione meccanica che descrive la dinamica del galleggiante:

$$F_I(t) + F_{PTO}(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \beta \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) \quad (6.71)$$

Con le ipotesi effettuate si ricorda che la forza incidente avrà un andamento sinusoidale con frequenza pari alla frequenza dell'onda. Il modello equivale ad un sistema massa-molla-smorzatore che può essere rappresentato con elementi elettrici sfruttando l'analogia formale che esiste tra queste equazioni e quelle di un circuito R-L-C. Di seguito scriviamo le equazioni caratteristiche di un circuito R-L-C alimentato da un generatore di tensione:

$$v(t) = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) \quad (6.72)$$

Da cui è evidente l'analogia che sussiste tra le varie grandezze:

$$\begin{cases} F(t) \leftrightarrow v(t) \\ x(t) \leftrightarrow q(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow i(t) \end{cases} \quad (6.73)$$

E quindi è possibile porre:

$$\begin{cases} K = \frac{1}{C} \\ R = \beta \\ L = M \end{cases} \quad (6.74)$$

Se poniamo:

$$v(t) = v_i(t) + v_{pto}(t) \quad (6.75)$$

²³ Come mostrato in [Jonathan K.H. Shek 06]

E' possibile schematizzare il nostro sistema secondo il circuito di Figura 6.7-1 (b)

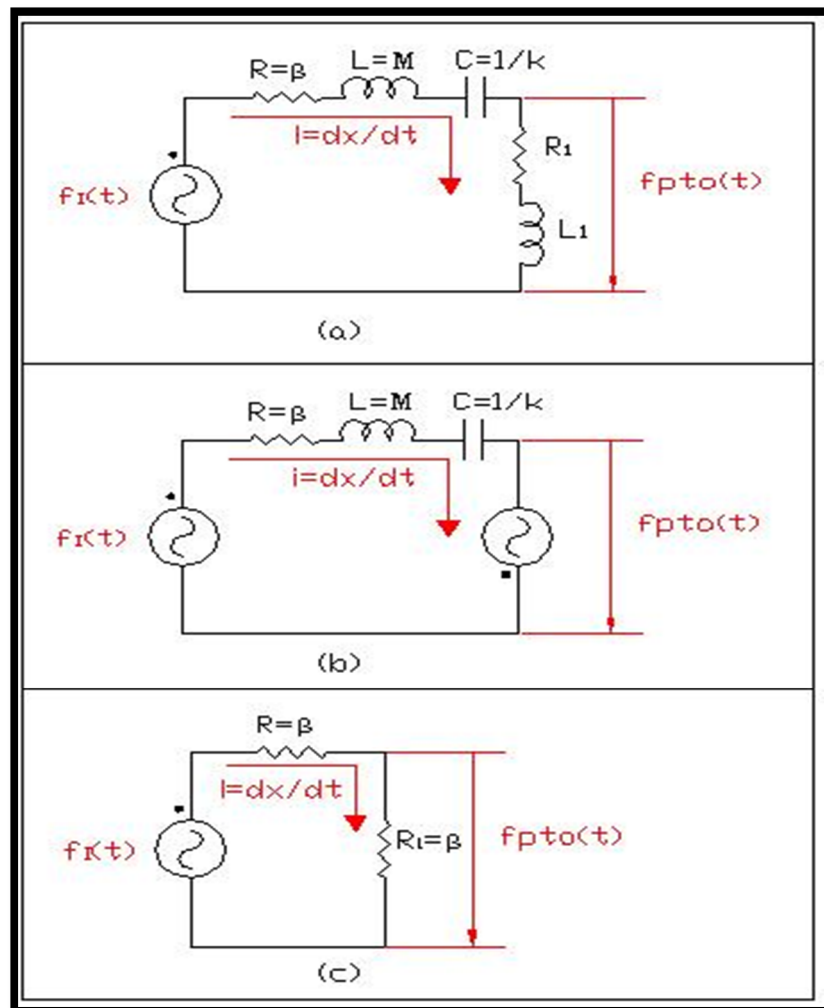


Figura 6.7-1: (a) Circuito R-L-C con carico passivo (b) Circuito RLC con generatore (c) Circuito a regime in condizioni di risonanza

La potenza erogata dal generatore rappresentativo della forza della macchina è la potenza che la macchina elettrica trasmette verso il galleggiante, dati i segni adottati per le varie grandezze questa potenza in media dovrà essere negativa per consentire che il flusso di energia vada verso la rete.

$$p_{PTO}(t) = v_{pto}(t)i(t) = F_{PTO}(t) \frac{dx(t)}{dt} \quad (6.76)$$

In analogia meccanica-elettrica questo significa poter sostituire il generatore di Figura 6.7-1 (b) con un carico passivo come mostrato in Figura 6.7-1 (a). La potenza che il moto ondoso trasmette al galleggiante invece vale:

$$p_I(t) = v_I(t)i(t) = F_I(t) \frac{dx(t)}{dt} \quad (6.77)$$

E questa potenza dovrà essere in media positiva. Dato che la sollecitazione sul galleggiante è per ipotesi sinusoidale con frequenza pari alla frequenza dell'onda il massimo trasferimento di potenza si avrà quando il circuito funziona in condizioni di risonanza:

$$\begin{cases} R_1 = R \\ \omega L_1 = -(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \end{cases} \quad (6.78)$$

Da cui:

$$\begin{cases} R_1 = R = \beta \\ L_1 = \frac{1}{\omega^2 C} - L = \frac{k}{\omega^2} - M \end{cases} \quad (6.79)$$

Quindi la forza che deve erogare la macchina, cioè il riferimento per il blocco di mappatura della corrente sarà:

$$F_{PTO}(t) = Frif(t) = -\left(R_1 i(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt}\right) = \left(M - \frac{k}{\omega^2}\right) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \beta \frac{dx(t)}{dt} \quad (6.7-10)$$

Il modello Matlab che realizza l'equazione è mostrato in Figura 6.7-2.

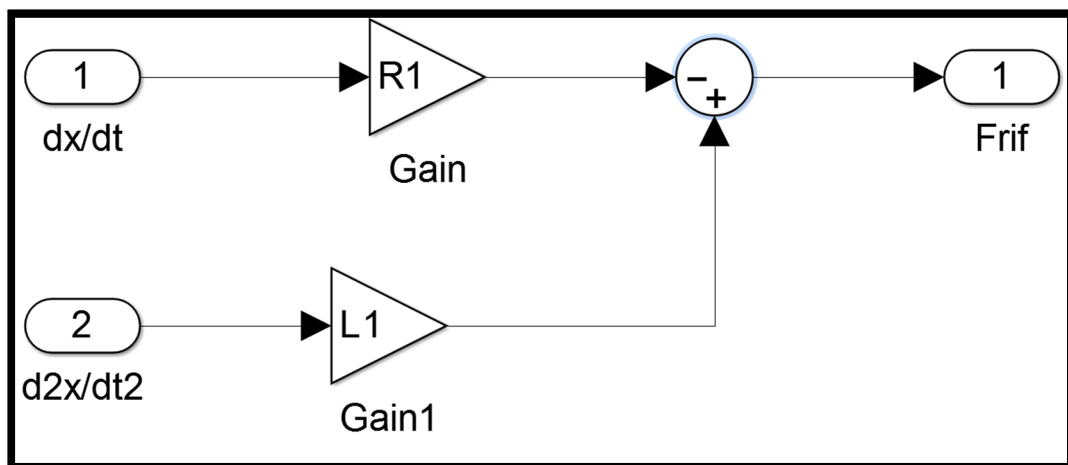


Figura 6.7-2:Modello Matlab dell'algoritmo di controllo

Il parametro L_1 cambia con la frequenza dell'onda incidente, nella realizzazione fisica di questo blocco ci dovrà essere una misura o una stima di questa grandezza.

In condizione di regime del circuito elettrico, il generatore rappresentativo della forza ondosa agisce su un circuito puramente resistivo composto da due resistenze uguali di valore pari a β come mostrato in Figura 6.7-2 (c).

E' evidente che solo metà della potenza ondosa è trasferita verso la rete, questo limite fisico può essere superato solo se il dispositivo possiede più gradi di libertà meccanici oltre alla traslazione lungo un asse verticale.

Si osserva che tensione e corrente sono in fase a regime, quindi lo saranno anche forza trasmessa dall'onda incidente e velocità.

6.8. Modello più accurati WEC

Nei paragrafi iniziali si è fatto riferimento ad un corpo cilindrico che oscilla per effetto del moto ondoso. Si è assunto implicitamente che la macchina elettrica sia ubicata su una struttura fissa, nella realtà viene utilizzato un corpo galleggiante sul quale è fissata la macchina elettrica²⁴. Uno schema di principio è mostrato in Figura 6.8-1.

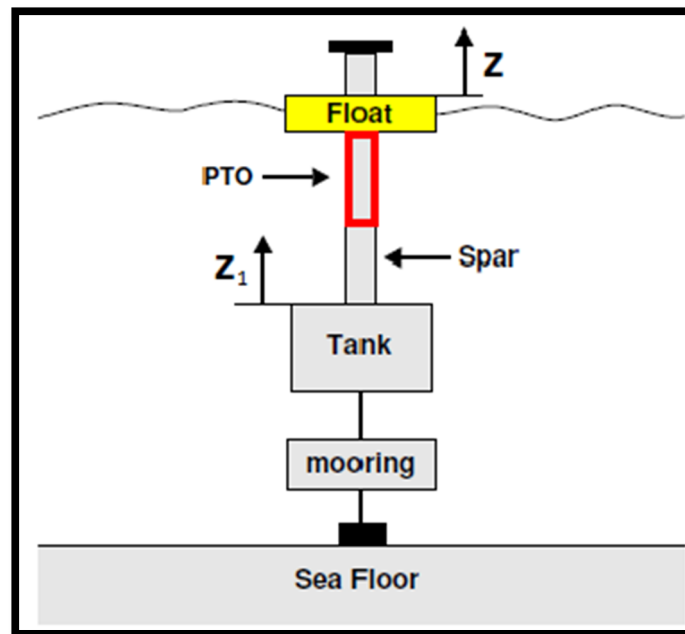


Figura 6.8-1: Schema di principio di un point-absorber con due corpi oscillanti

Il modello del galleggiante con un solo grado di libertà trattato nei paragrafi precedenti è utilizzabile nell'ipotesi che il corpo sul quale è ubicata la macchina si mantenga fisso nello spazio.

Nel caso che invece si consideri l'oscillazione di entrambi i corpi, le variabili meccaniche significative diventano due, quelle che caratterizzano l'oscillazione del Float e del Tank.

Un sistema di ancoraggio del dispositivo è mostrato in Figura 6.8-2. Il modello matematico del galleggiante ora si complica leggermente sia nella parte elettrica che nella parte meccanica. Nella parte elettrica il dispositivo presenta due gradi di libertà meccanici, infatti la forza di reazione agente sullo statore non si scarica su una struttura fissa ma fa oscillare il galleggiante e lo statore stesso della macchina. Il modello elettrico della macchina rimane lo stesso a patto che i coefficienti della matrice di Park siano scelti:

$$\theta = z - z_1 \quad (6.81)$$

²⁴ Come mostrato in [Markus Richter 11]

Ed in questo caso ho due forze uguali ed opposte di valore pari in modulo a quella dell'ultima equazione di (5.29), ma di segno opposto. In seguito si indicherà con:

$$F_{gen} = \frac{\pi}{\tau} (L_d - L_q) i_d i_q \quad (6.82)$$

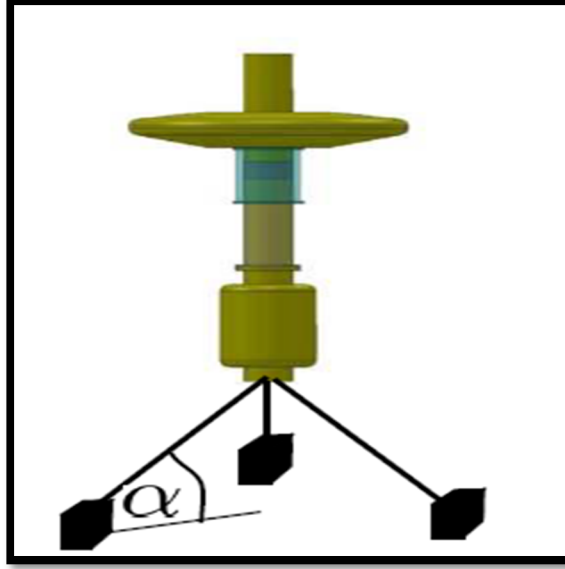


Figura 6.8-2: Sistema di ancoraggio di un WEC con due corpi galleggianti

Il modello del galleggiante invece in questo caso sarà composto, sotto tutte le ipotesi introdotte per la modellazione del corpo con un solo grado di libertà, da due equazioni del tipo:

$$\begin{cases} F_{gen}(t) + F_{i1}(t) = M_1 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \beta_1 \frac{dz(t)}{dt} + k_1 z(t) \\ F_{i2}(t) - F_{gen}(t) = M_2 \frac{d^2 z_1(t)}{dt^2} + \beta_2 \frac{dz_1(t)}{dt} + k_2 z_1(t) \end{cases} \quad (6.83)$$

Dove in questo caso:

$$\begin{cases} M_1 = m_1 + A_{11} + A_{12} \\ \beta_1 = B_{11} \\ k_1 = C_{11} \\ M_2 = m_2 + A_{22} + A_{21} \\ \beta_2 = B_{22} \\ k_2 = C_{11} + k_m \end{cases} \quad (6.84)$$

Dove si può osservare come i termini di added-mass devono comprendere il termine di mutua interazione tra i due corpi. Nell'ultimo coefficiente il termine K_m modella la componente di forza dovuta all'ancoraggio (opportunamente linearizzata).

Sfruttando l'analogia meccanica elettrica ed ipotizzando sollecitazioni sinusoidali:

$$\begin{cases} L_1 = M_1 \\ R_1 = \beta_1 \\ C_1 = \frac{1}{k_1} \\ L_2 = M_2 \\ R_2 = \beta_2 \\ C_2 = \frac{1}{k_2} \end{cases} \quad (6.85)$$

Ricordando che le forze sono in analogia con le tensioni e le correnti con le velocità il circuito elettrico analogo al sistema meccanico è mostrato in Figura 6.8-3.

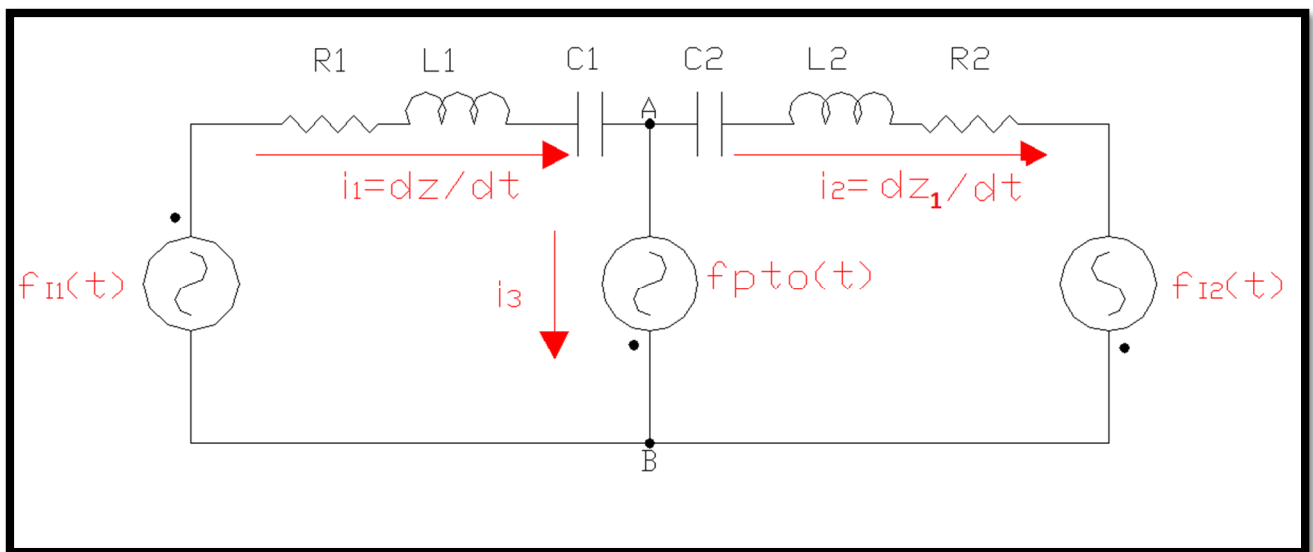


Figura 6.8-3: Equivalente elettrico di un WEC con due corpi galleggianti

Nella Figura 6.8-3 è indicata la corrente:

$$i_3(t) = \frac{dz(t)}{dt} - \frac{dz_1(t)}{dt} \quad (6.86)$$

Indicando con:

$$\begin{cases} \hat{z}_1 = R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1} \\ \hat{z}_2 = R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2} \end{cases} \quad (6.87)$$

E' possibile andare ad applicare il teorema di Thevenen ai morsetti del generatore rappresentativo del PTO si ottiene:

$$\begin{cases} \hat{F}_{AB0} = \hat{F}_{i1} - \frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_1 + \hat{z}_2} (\hat{F}_{i1} + \hat{F}_{i2}) \\ \hat{z}_{th} = \frac{\hat{z}_1 \hat{z}_2}{\hat{z}_1 + \hat{z}_2} \end{cases} \quad (6.88)$$

Quindi il circuito diventa equivalente dal punto di vista formale a quanto fatto per un solo corpo oscillante come mostrato in Figura 6.8-4.

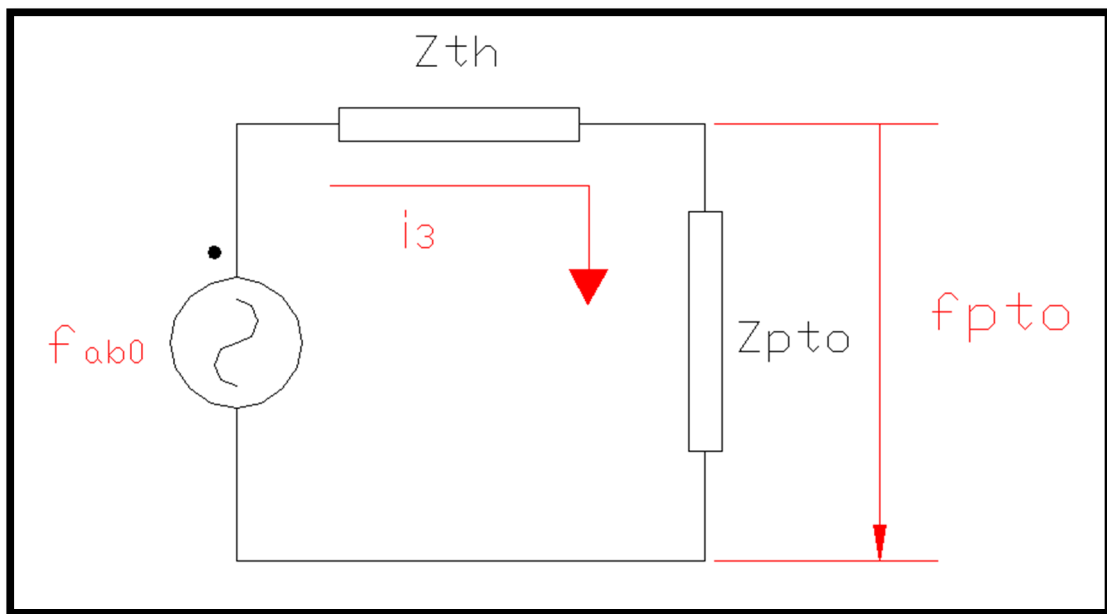


Figura 6.8-4: Circuito elettrico equivalente con due corpi oscillanti

Per avere il massimo trasferimento di potenza dovrò avere che:

$$\hat{z}_{pto} = \hat{z}_{th}^* \quad (6.89)$$

E' quindi estendibile il modello Matlab presentato nei paragrafi precedenti anche al caso di un WEC costituito da due corpi oscillanti. L'unica eccezione riguarda la modellizzazione della forza di eccitazione che deve essere revisionata in modo opportuno includendo due forze.4

7. Il modello completo e le simulazioni

7.1. Il modello completo e le simulazioni

Il modello completo del WEC è mostrato in Figura 7.1-1. Esso è composto da due parti, la prima nella parte inferiore corrisponde ai vari blocchi analizzati in precedenza mentre la seconda è la zona dove è possibile prelevare gli andamenti delle grandezze fisiche più significative. Alcune di queste grandezze sono rilevabili direttamente dal modello tramite collegamento wireless, altre invece necessitano di qualche elaborazione. Tra queste ultime vi è il sottosistema identificato dal nome Potenze che al suo interno possiede cinque sottosistemi ognuno dei quali calcola una propria aliquota. Quella che viene indicata come potenza dell'onda è la potenza erogata dal generatore rappresentativo della forza incidente di Figura 6.7-1 (a). Come precedentemente detto solo metà di questa potenza potrà essere prelevata dal dispositivo. Il blocco farà il prodotto tra la forza incidente e la velocità del galleggiante come mostrato in Figura 7.1-2 (d). Ovviamente per i riferimenti scelti questa potenza sarà sempre positiva. La potenza che è trasferita dall'onda alla macchina elettrica è quella che assorbono i generatori controllati di Figura 5.2-2 e vale:

$$p_T(t) = -\omega \Phi_q i_d + \omega \Phi_d i_q = \frac{\pi dx(t)}{\tau dt} (L_d - L_q) i_d i_q \quad (7.11)$$

Dove si vede ovviamente che la potenza trasmessa è il prodotto della forza per la velocità. Il blocco che rappresenta questa grandezza è mostrato in Figura 7.1-2 (a).

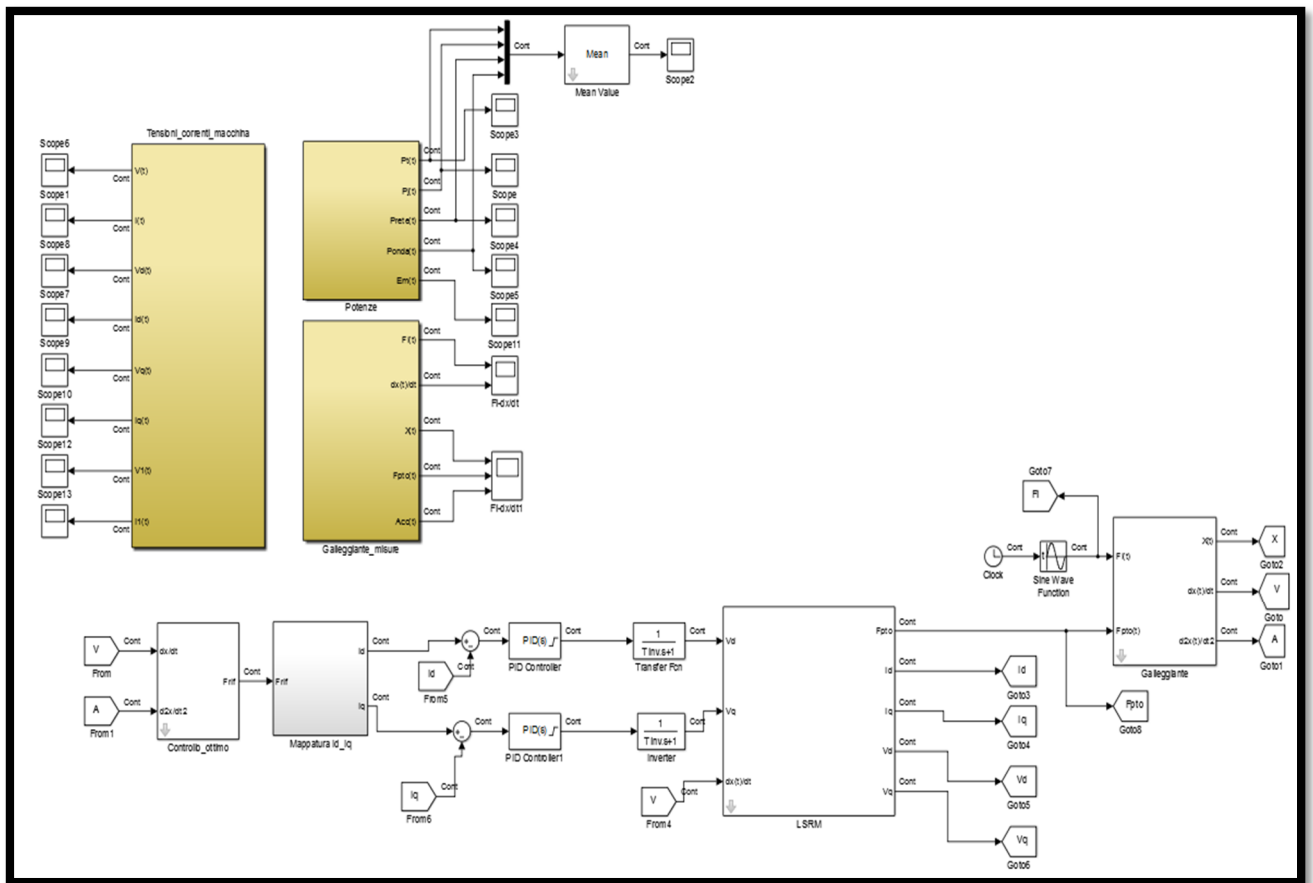


Figura 7.1-1:Modello completo

La potenza trasmessa, per i segni adottati, sarà almeno in valore medio sempre negativa. Ci potrebbero essere dei valori istantanei che invece sono positivi, cioè la macchina funziona in alcuni istanti di tempo da motore per riuscire così ad estrarre la massima quantità di potenza dall'onda.

Le perdite per effetto Joule, sono ovviamente sempre positive, possono essere determinate direttamente dalle grandezze di Park²⁵.

$$p_f(t) = R_s(i_d(t)^2 + i_q(t)^2) \quad (7.12)$$

Il blocco che realizza questa equazione è mostrato in Figura 7.1-2 (c). Lo stesso vale per la potenza assorbita dalla macchina che vale quindi:

$$p_{ass}(t) = v_d(t)i_d(t) + v_q(t)i_q(t) \quad (7.13)$$

Il blocco che realizza la relazione sopra è mostrato in Figura 7.1-2 (b). La potenza con i riferimenti scelti rappresenta la potenza istantanea erogata dalla rete verso la macchina quindi si vuole che essa

²⁵ Come indicato in Appendice 10.1

almeno in valore medio sia sempre negativa. Anche l'energia magnetica immagazzinata nella macchina può essere dedotta direttamente dalle grandezze di Park:

$$E_m(t) = \frac{1}{2} L_d i_d^2 + \frac{1}{2} L_q i_q^2 \quad (7.14)$$

Come mostrato in Figura 7.1-2 (e).

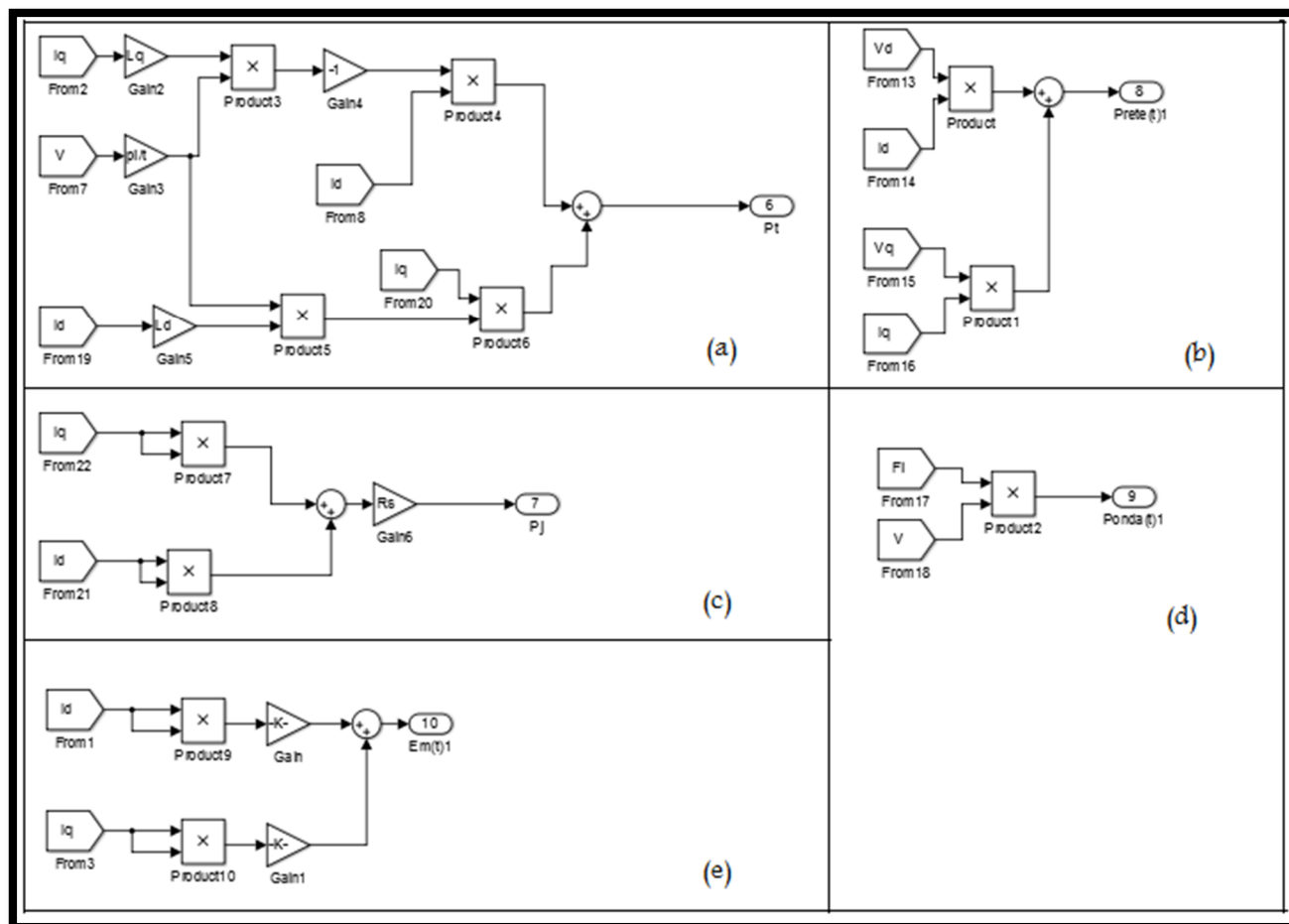


Figura 7.1-2: (a)Potenza trasformata (b) Potenza rete (c) Perdite resistive (d)Potenza d'onda (e)Energia magnetica

Per testare il modello vengono inseriti una serie di valori relativi alla macchina, al moto ondoso ed al galleggiante considerato come un oggetto con un solo grado di libertà . Questi valori sono inseriti solo per testare il modello, ma non hanno alcun significato reale. Stabilire i valori precisi è compito del progettista con l'ausilio di metodo F.E.M sia per la macchina elettrica sia per il galleggiante. I valori utilizzati per il test sono riportati nella tabella che segue:

Grandezza	Simbolo utilizzato nel modello	Valore numerico
Frequenza onda incidente [Hz]	f	0.222
Forza incidente [N]	F_i	66000
Massa complessiva [kg]	$M = m + A_{33}$	91700
Damping coefficient [(N*sec)/m]	B	25000
Coefficiente idrostatico [N/m]	K	285000
Induttanza di asse diretto [H]	L_d	3.8
Induttanza di asse quadratura [H]	L_q	0.43
Resistenza di statore [Ω]	R_s	2
Larghezza polo [m]	t	0.2
Limite per la tensione induttiva [N]	e	6600
Ritardo inverter-svm [sec]	T_{inv}	1e-4

In Figura 7.1-3 è mostrato l'andamento della forza incidente e della velocità del galleggiante che esaurito l'effetto del transitorio si portano in fase come già discusso nel paragrafo riguardante l'algoritmo di controllo.

Altra grandezza significativa è lo spostamento del galleggiante come mostrato in Figura 7.1-4.

La parte elettromeccanica è interessata dalla forza trasmessa dalla macchina al dispositivo e dalla sua potenza trasformata come mostrato in Figura 7.1-5. Come già accennato la potenza trasformata ha un valore medio negativo, e questo è coerente con i riferimenti scelti, ma per alcuni istanti di tempo la macchina funziona da motore per effetto del controllo reattivo. Si può inoltre osservare come a regime la funzione oscilla con una frequenza pari a metà della frequenza d'onda (si è scelto infatti un periodo d'onda pari a 4.5sec con altezza dell'onda incidente pari a 0.5m). L'andamento (mostrato con un ingrandimento) è giustificato dal fatto che la potenza trasformata a regime è il prodotto di due funzioni sinusoidali iso-frequenziali (Forza PTO- Velocità galleggiante).

Le correnti di asse d e di asse q che sono entranti nella macchina sono mostrate in Figura 7.1-7. Come si vede le correnti sono funzioni continue e non contengono cuspidi, questo comporta una limitazione della tensione che non avrà più valori divergenti. Il valore minimo della corrente di asse diretto a regime dipenderà dal valore che assume il parametro (e) settato in questo caso come un decimo della forza incidente. Questo come già discusso permetterà al sistema di inseguire la forza limitando al tensione ad un valore finito al prezzo di un aumento delle perdite per effetto joule.

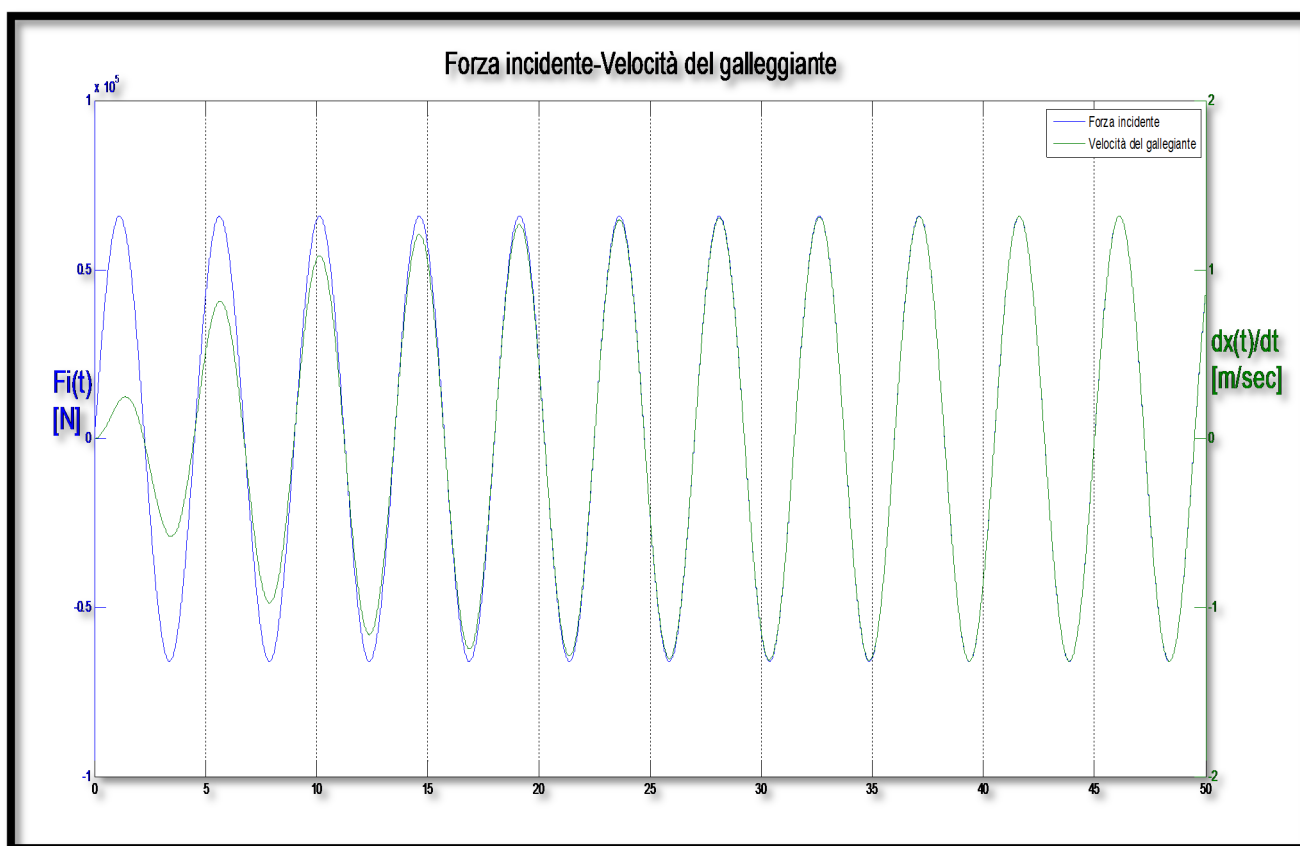


Figura 7.1-3: Velocità del galleggiante (verde) Forza incidente (blu)

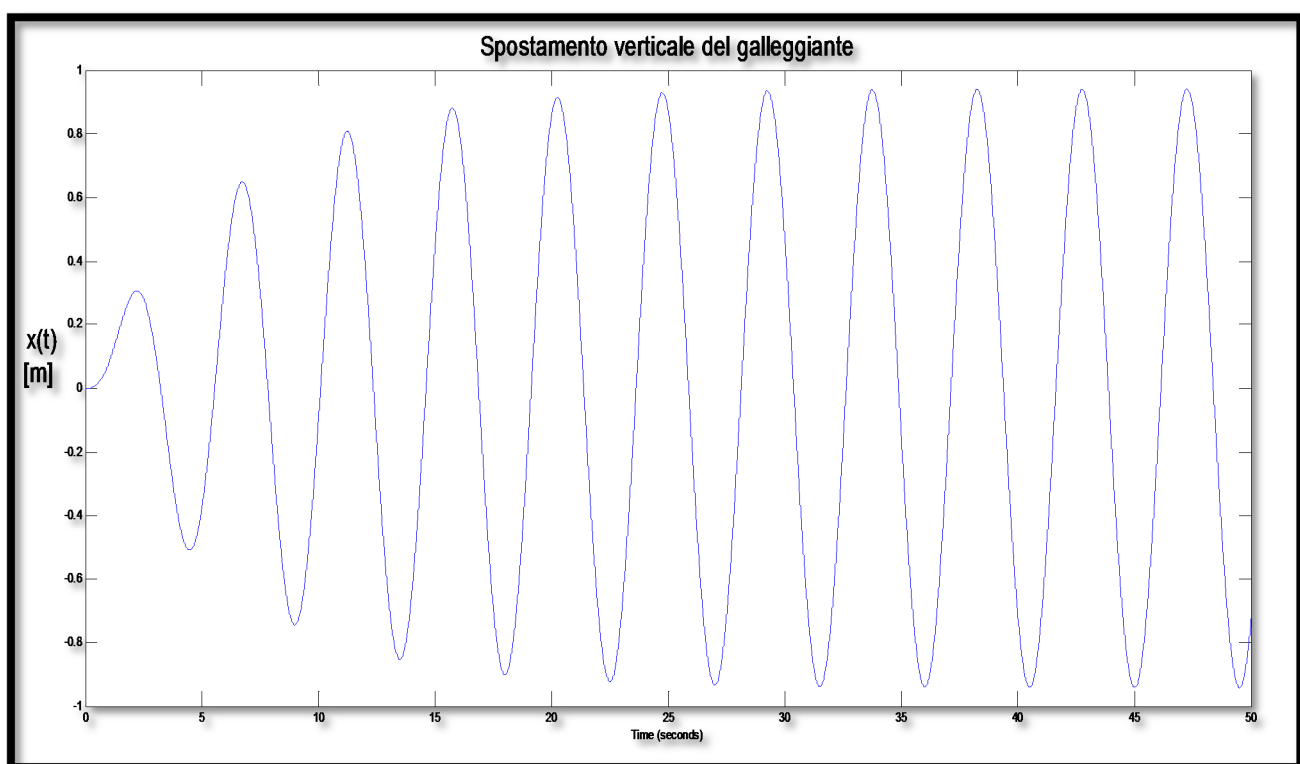


Figura 7.1-4: Spostamento del galleggiante

All'istante di inizio simulazione il blocco mappatura delle correnti fornisce un valore di corrente di asse diretto diverso da zero per verificare le equazioni di (6.614). Questo porta in ingresso al regolatore un errore a gradino che cerca di compensare aumentando in modo molto elevato la tensione. Per limitare la tensione nei primi istanti di avviamento, il regolatore è provvisto di limiti di saturazione. La tensione di asse diretto e il particolare degli istanti iniziali sono mostrati in Figura 7.1-8. La tensione di asse in quadratura è mostrata in Figura 7.1-9. Per concludere la parte relativa alle grandezze elettriche si visualizza l'andamento della tensione e corrente ai capi della macchina, ovviamente questo è l'andamento ideale, mentre l'andamento reale sarà quello causato dalla tensione prodotta dall'inverter con logica S.V.M. Le due grandezze sono mostrate in Figura 7.1-10 e Figura 7.1-11. Le perdite per effetto Joule sono mostrate in Figura 7.1-12. Come si può osservare le perdite sono costituite da un valore medio e da una oscillazione pari a metà del periodo d'onda. La giustificazione di questo deriva dal fatto che, a regime, la corrente di asse diretto costituisce una funzione periodica di periodo pari a metà del periodo d'onda, essendo sempre positiva il suo quadrato è sempre una funzione periodica con lo stesso periodo. La corrente di asse in quadratura è una funzione alternativa con periodo pari al periodo dell'onda incidente, elevandola al quadrato, la parte negativa diventa positiva e la funzione dimezza il periodo rispetto a quella originale oscillando intorno ad un valore medio. La somma delle due correnti al quadrato equivale alla somma di due funzioni periodiche con lo stesso periodo ed in fase tra loro, quindi ancora una funzione periodica di periodo pari a metà del periodo dell'onda incidente.

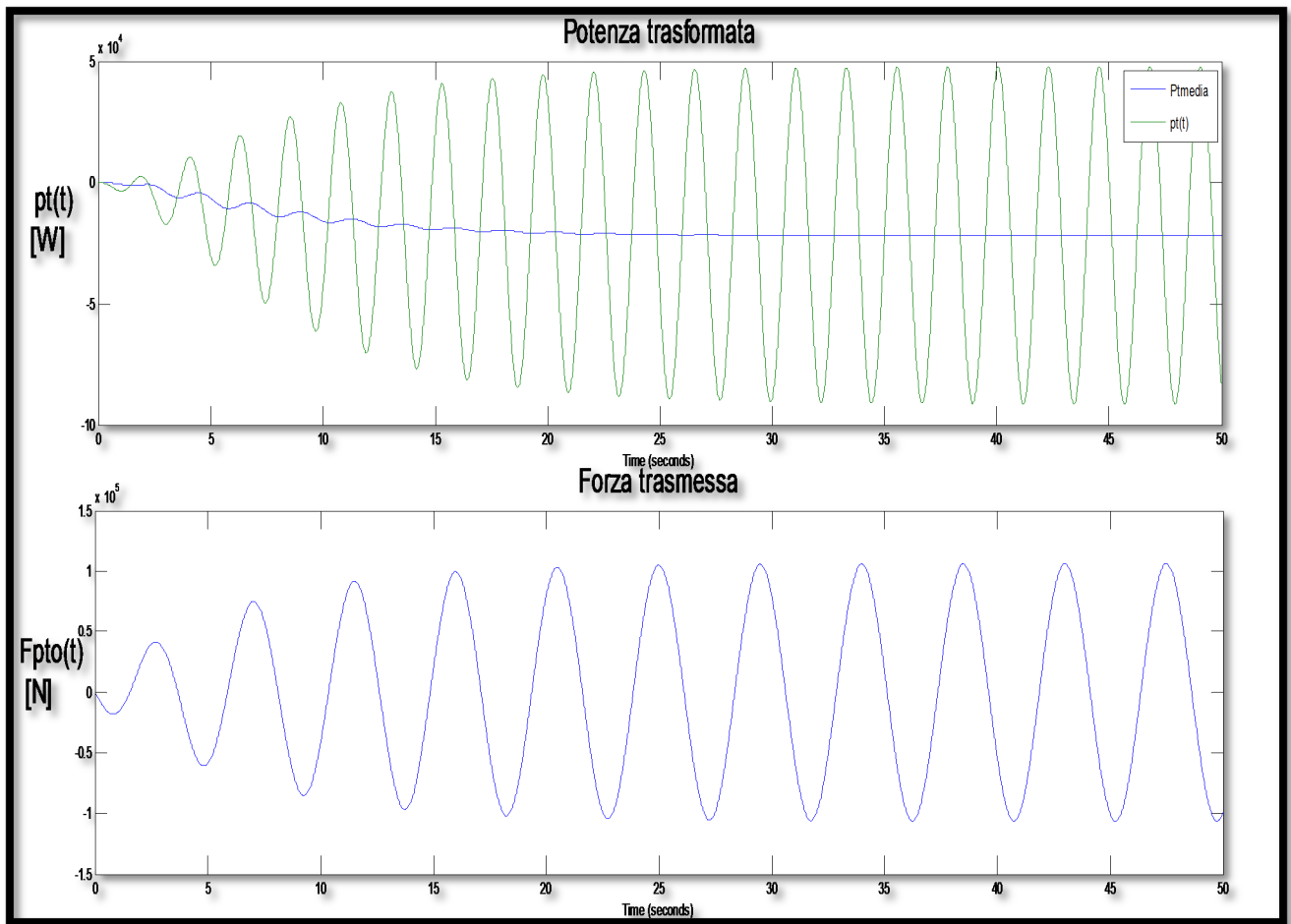


Figura 7.1-5: Potenza trasformata (sopra) Forza del PTO (sotto)

Per le stesse ragioni a regime anche l'energia magnetica immagazzinata dalla macchina sarà una funzione periodica, che oscilla con frequenza pari a metà del periodo d'onda come mostrato in Figura 7.1-13.

La potenza istantanea assorbita dalla macchina è mostrata in Figura 7.1-14, dalla quale si può verificare che in valore medio la potenza è negativa ma istantaneamente può anche essere positiva. E' possibile ricavare la potenza erogata dalla rete (ai morsetti della macchina) applicando il bilancio energetico alla macchina, che con i riferimenti scelti può essere espresso:

$$p_{ass}(t) = \frac{dE_m(t)}{dt} + p_T(t) + p_j(t) \quad (7.15)$$

La potenza trasformata e le perdite per effetto Joule, a regime, sono costituite dalla somma di un valore medio con una funzione periodica di periodo pari alla metà del periodo d'onda incidente. Anche l'energia magnetica avrà la stessa forma (a regime), in termini analitici:

$$E_m(t) = E_{m0} + \tilde{E}_m(t) \quad t. c. \quad \tilde{E}_m(t) = \tilde{E}_m\left(t + n\frac{T}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (7.1-6)$$

Dove con T ho indicato il periodo d'onda. La derivata di questa grandezza vale quindi:

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = \frac{d\tilde{E}_m(t)}{dt} \quad (7.17)$$

Se eseguiamo il valore medio della potenza assorbita su un periodo pari a metà periodo d'onda:

$$p_{ass} = \frac{2}{T} \int_t^{t+\frac{T}{2}} p_{ass}(x) dx = \frac{2}{T} \int_t^{t+\frac{T}{2}} \frac{dE_m(x)}{dx} + p_T(x) + p_J(x) dx \quad (7.1-8)$$

Analizzando separatamente i tre integrali che compongono la somma si osserva che gli integrali della potenza trasformata e delle perdite per effetto Joule daranno come risultato il solo valore medio togliendo la parte oscillante. L'integrale della energia magnetica invece diventa:

$$\frac{2}{T} \int_t^{t+\frac{T}{2}} \frac{d\tilde{E}_m(x)}{dx} dx = \frac{2}{T} \left(\tilde{E}_m \left(t + \frac{T}{2} \right) - \tilde{E}_m(t) \right) = 0 \quad (7.1-9)$$

essendo l'integrale eseguito sulla sua periodo. Le varie potenze medie in gioco sono mostrate in Figura 7.1-15 e sono state ottenute grazie ad un blocco di media mobile tarato su metà periodo dell'onda incidente. Nella Figura 7.1-15 è mostrata anche la potenza posseduta dall'onda e si può osservare come solo la metà sia effettivamente trasformabile. Un comportamento che è utile osservare si ha aumentando la resistenza di statore, il sistema di controllo inseguirà in ogni caso la forza di riferimento e quindi farà circolare le medesime correnti nella macchina aumentando le perdite per effetto joule. Può accadere che le perdite per effetto Joule superino la potenza trasformata e quindi invece di immettere flusso di potenza verso la rete sia la rete a dover fornire potenza, che insieme alla potenza trasformata, va ad alimentare le perdite come mostrato in Figura 7.1-16. Ovviamente la macchina sarebbe mal progettata, le alternative sono diminuire le resistenze statoriche oppure aumentare la differenza tra l'induttanza di asse diretto e quadratura per avere minori correnti. Si discretizza il sistema secondo la tecnica di Tuistin e si fa vedere come l'uscita del regolatore ora sia una funzione discreta. Ovviamente per apprezzare questo occorre aumentare la visualizzazione ad ordini di grandezza comparabili con il tempo di campionamento come mostrato in Figura 7.1-17. Tornando al caso continuo visualizziamo la differenza che sussiste tra il riferimento di corrente e la corrente effettiva (corrente in uscita al regolatore che è retro-azionata con un sensore ideale che ha una funzione di trasferimento uguale ad uno) che caratterizzano i sistemi in retroazione di Figura 6.5-1. In Figura 7.1-18 è mostrato l'andamento del riferimento e della corrente effettiva per l'asse diretto mentre in Figura 7.1-19 sono mostrate le medesime grandezze per l'asse in quadratura. Come

si osserva dalle figure la differenza è rilevabile solo con un alto ingrandimento, e non comporta significativi errori sul comportamento complessivo del sistema.

Una successiva prova che è possibile effettuare consiste nell'aumentare la costante di tempo rappresentativa del ritardo introdotto dall'inverter-SVM. Viene effettuata una prova ponendo $T_{inv}=10\text{ms}$. L'andamento della forza incidente e della velocità in queste condizioni non risultano più in fase indicando un non ottimale funzionamento della regolazione, come mostrato in Figura 7.1-20 . Andiamo quindi ad analizzare la differenza tra i riferimenti in ingresso all'anello di corrente e la corrente effettiva. Come si osserva sia per l'asse d (Figura 7.1-21) che per l'asse q (Figura 7.1-22) c'è ora una differenza più marcata. Effettuando opportune prove si osserva come l'errore tra le due funzioni sia dovuto prevalentemente all'interferenza dei canali di mutuo accoppiamento. Per ovviare al problema si può procedere al disaccoppiamento dei canali mutui, come mostrato in Figura 7.1-23. Come mostrato nella figura si va a sommare all'uscita del regolatore il segnale dovuto al proprio canale mutuo, ma con segno opposto, eseguendone così la compensazione. Eseguendo questa operazione i risultati migliorano sensibilmente, come mostrato nella Figura 7.1-24 per quanto riguarda la forza incidente e la velocità del galleggiante, e in Figura 7.1-25 per quanto riguarda la differenza tra il segnale di riferimento e le correnti effettive.

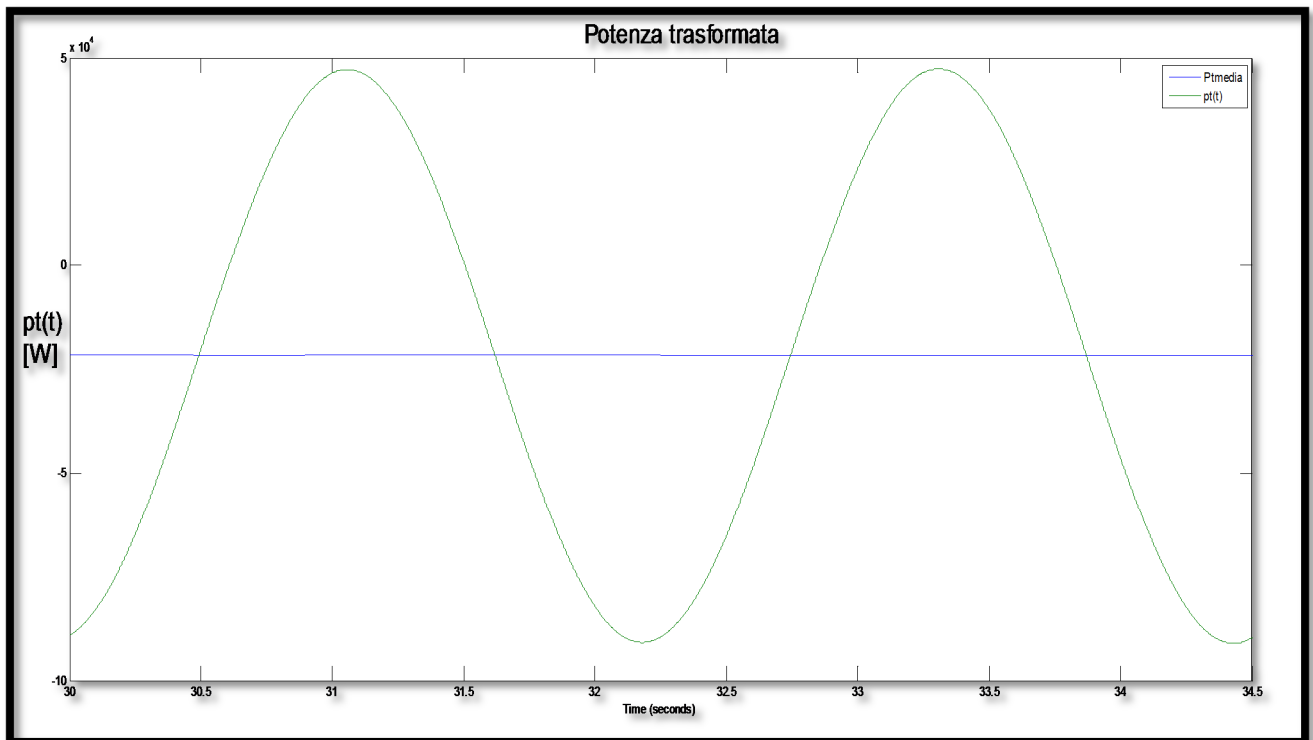


Figura 7.1-6: Ingrandimento della potenza trasmessa a transitorio esaurito

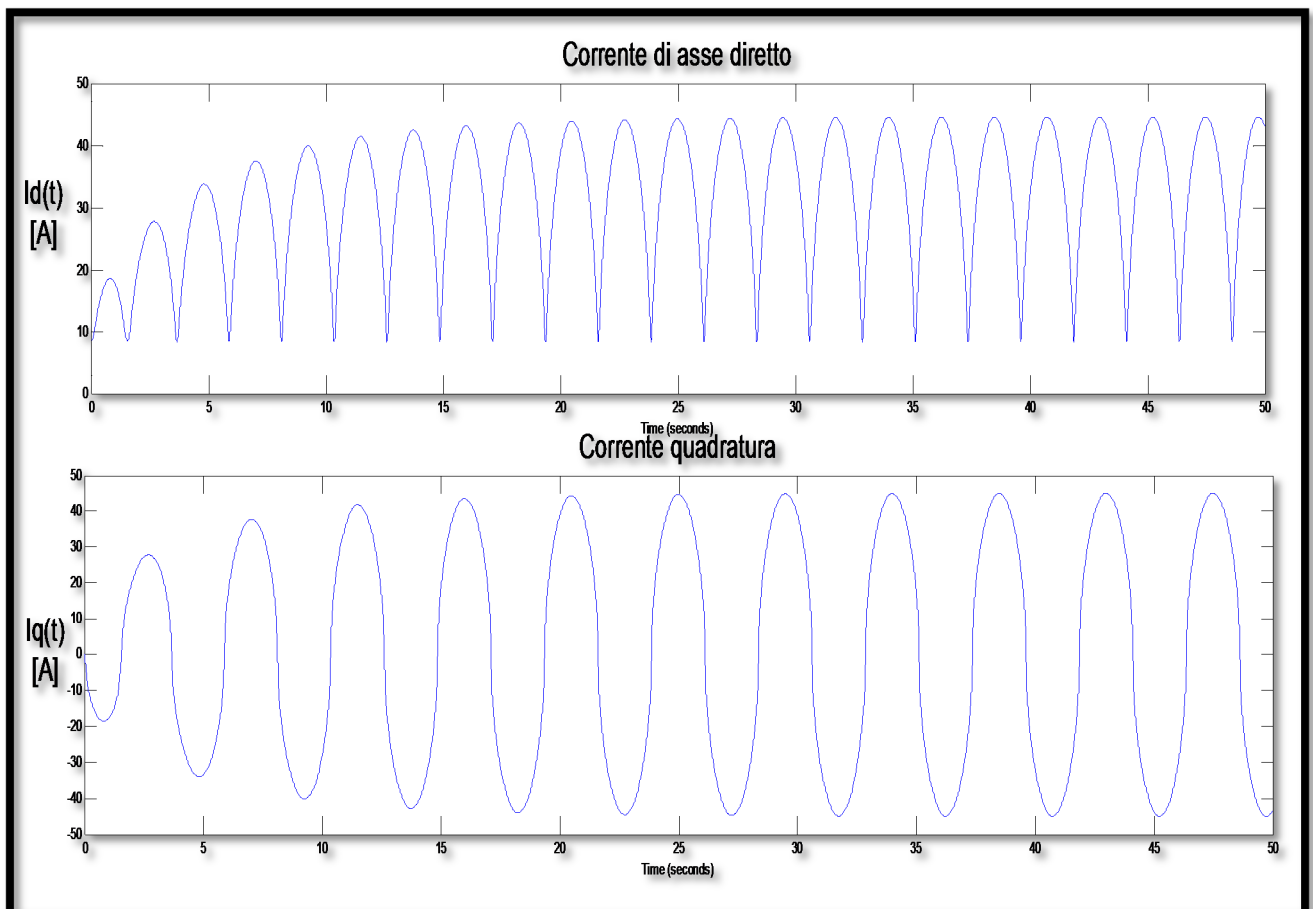


Figura 7.1-7: Corrente di asse diretto (sopra) corrente di asse quadratura (sotto)

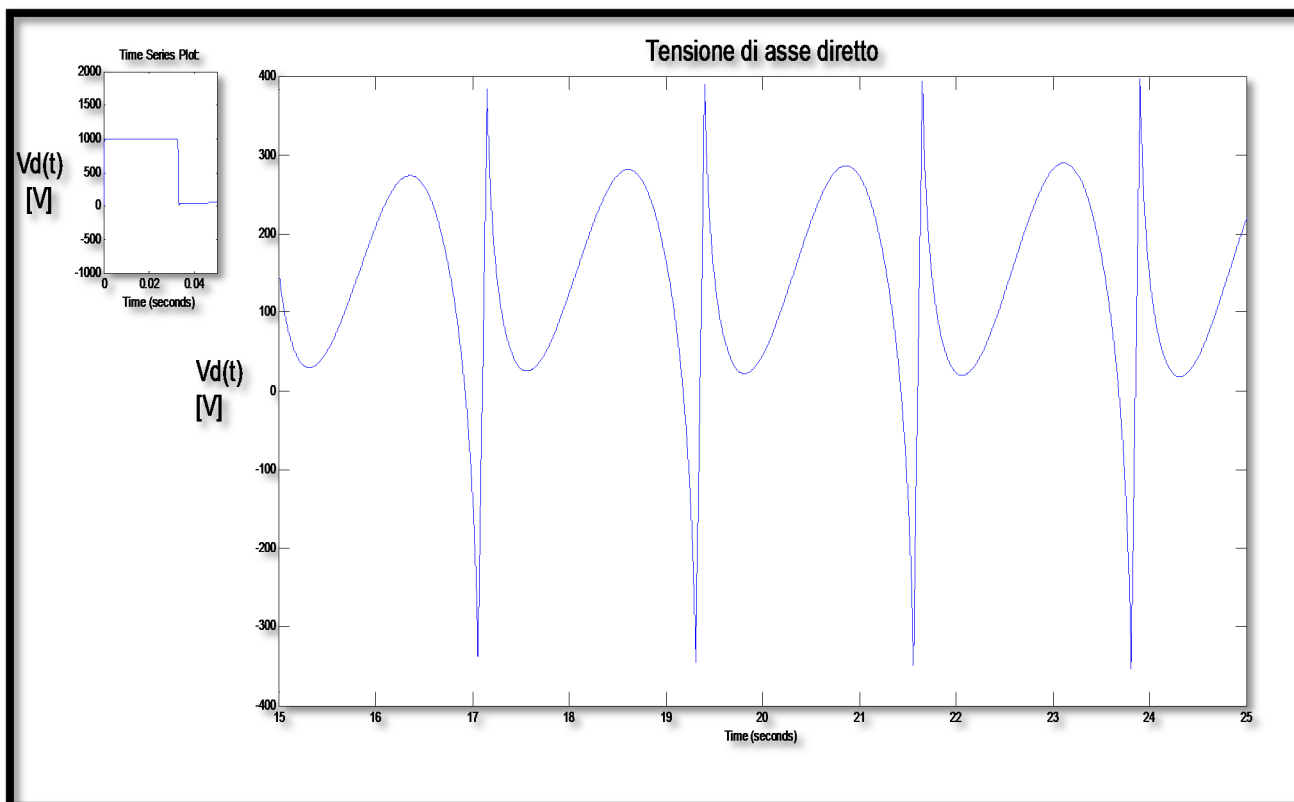


Figura 7.1-8: Tensione asse diretto (riquadro grande) Primi istanti con intervento del regolatore (riquadro piccolo)

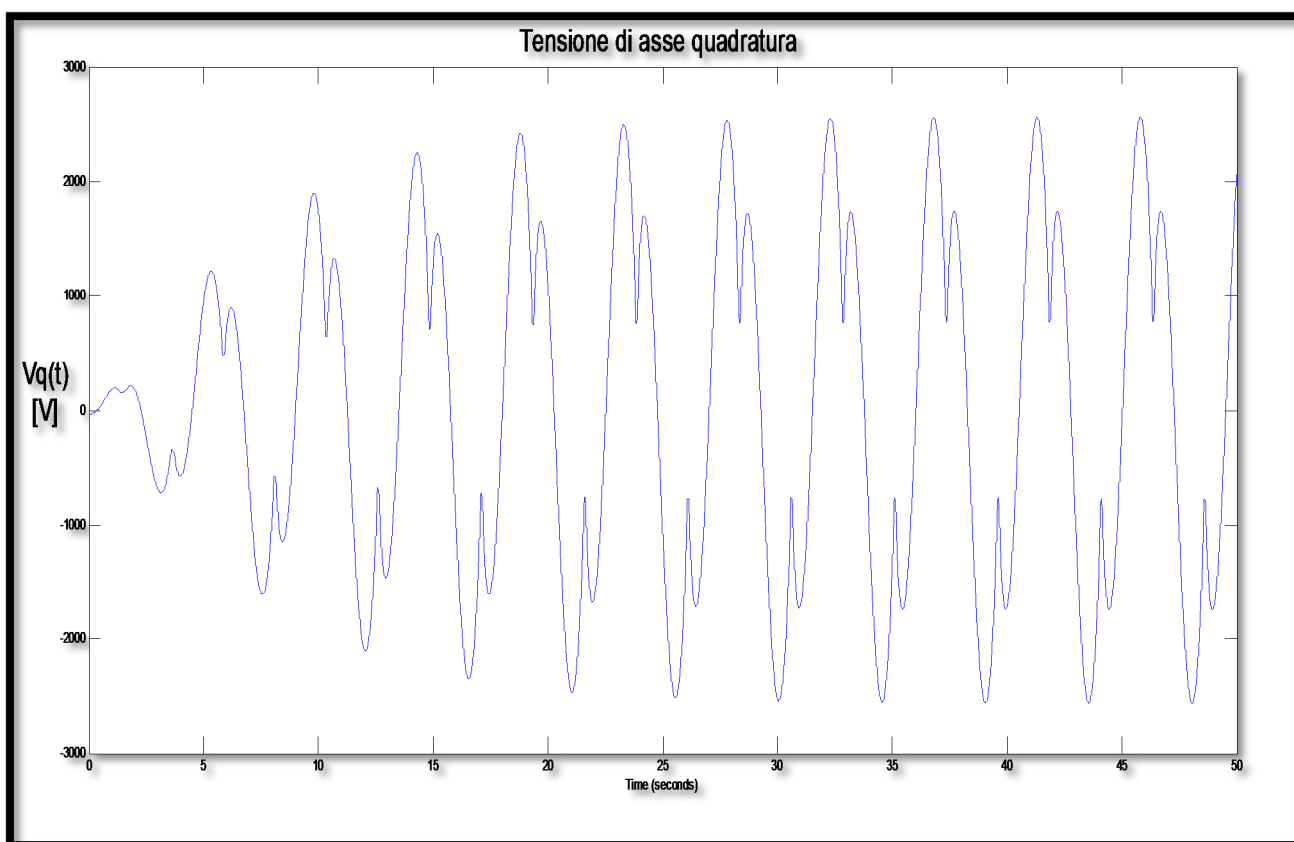


Figura 7.1-9: Tensione di asse quadratura

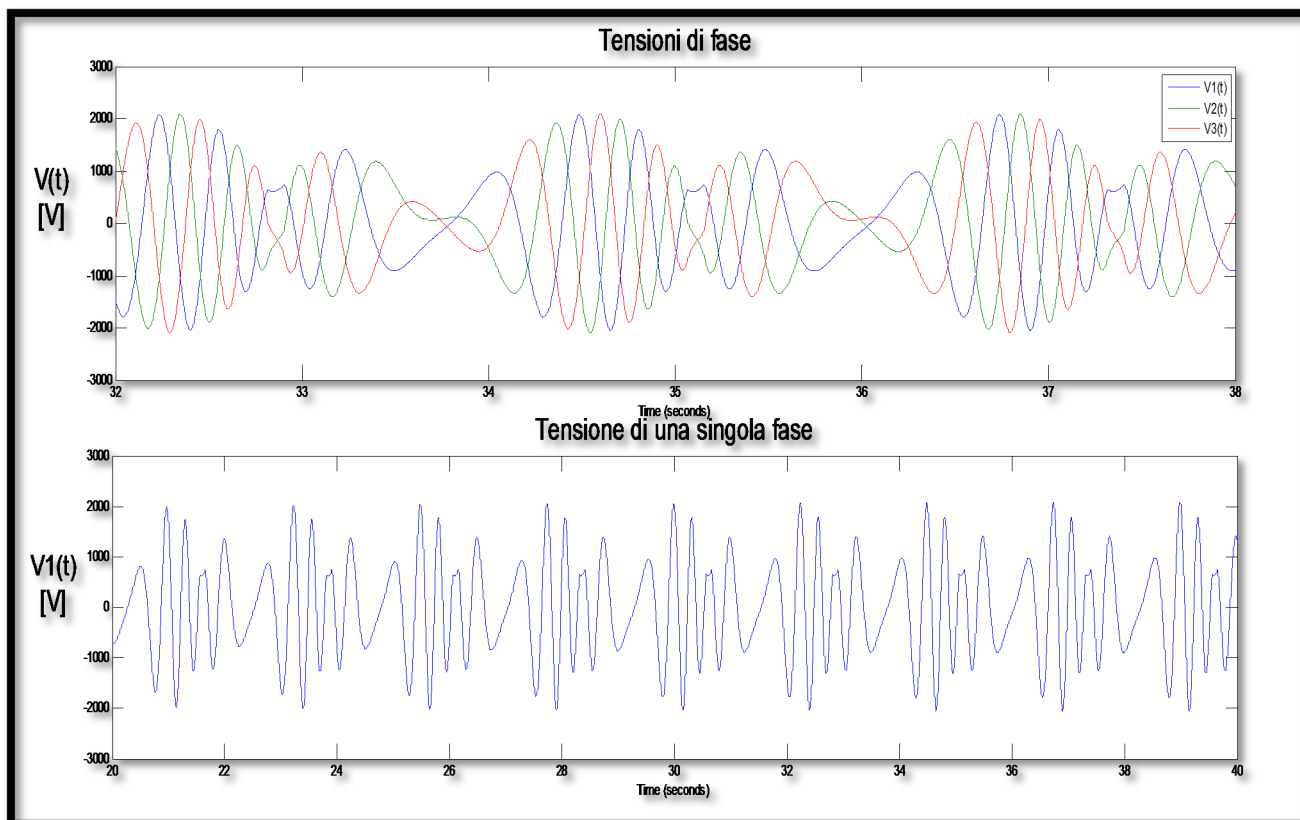


Figura 7.1-10: Tre tensioni di fase (sopra) Singola tensione (sotto)

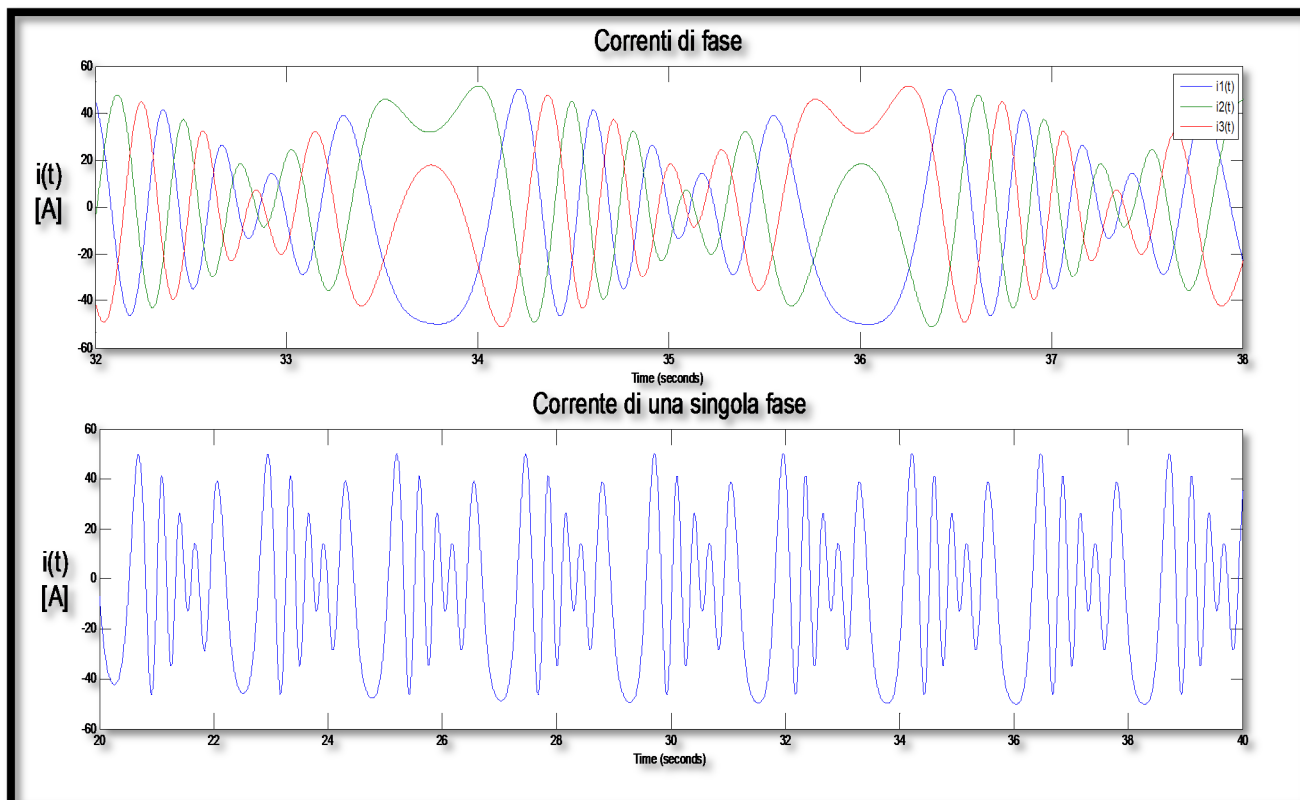


Figura 7.1-11: Tre correnti di fase (sopra) Singola corrente di fase (sotto)

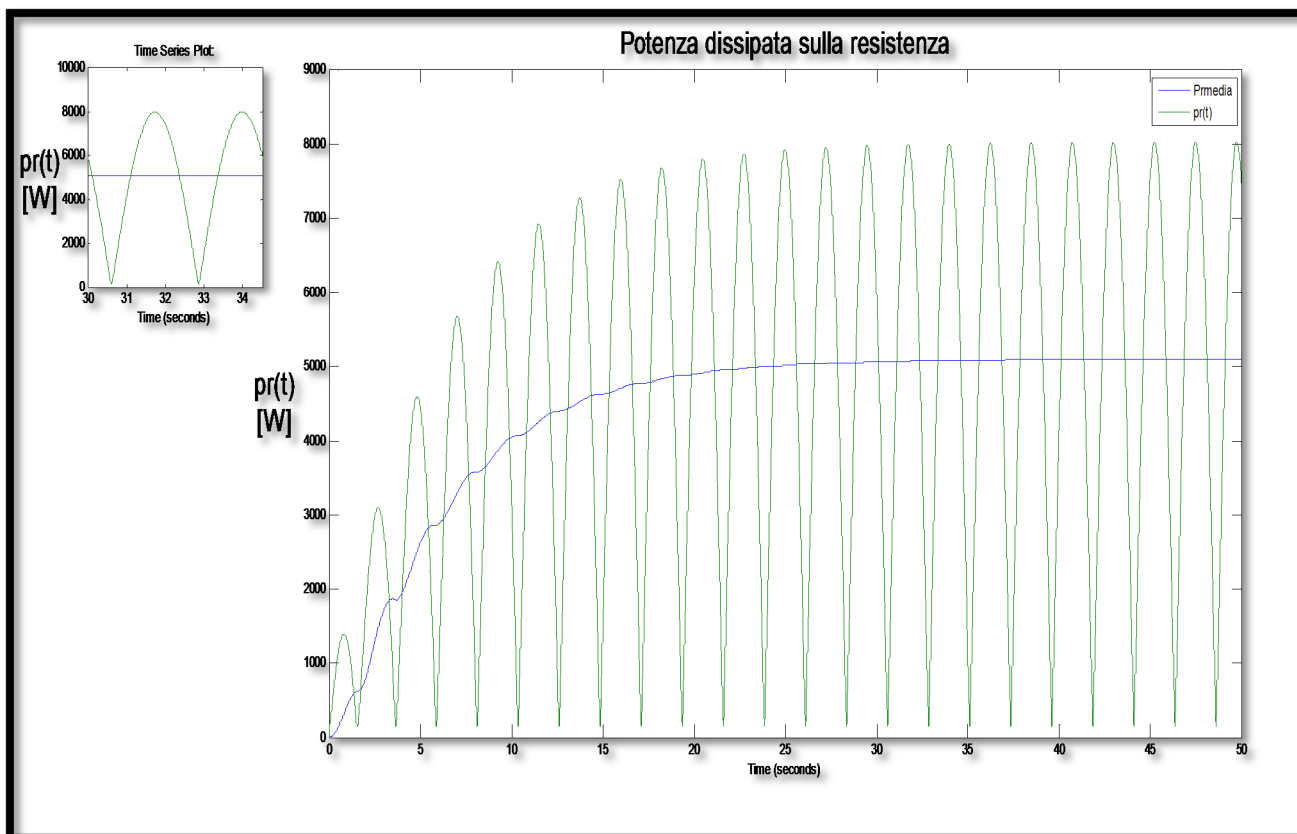


Figura 7.1-12: Perdite effetto joule (riquadro principale) Andamento di regime ingrandito (riquadro più piccolo)

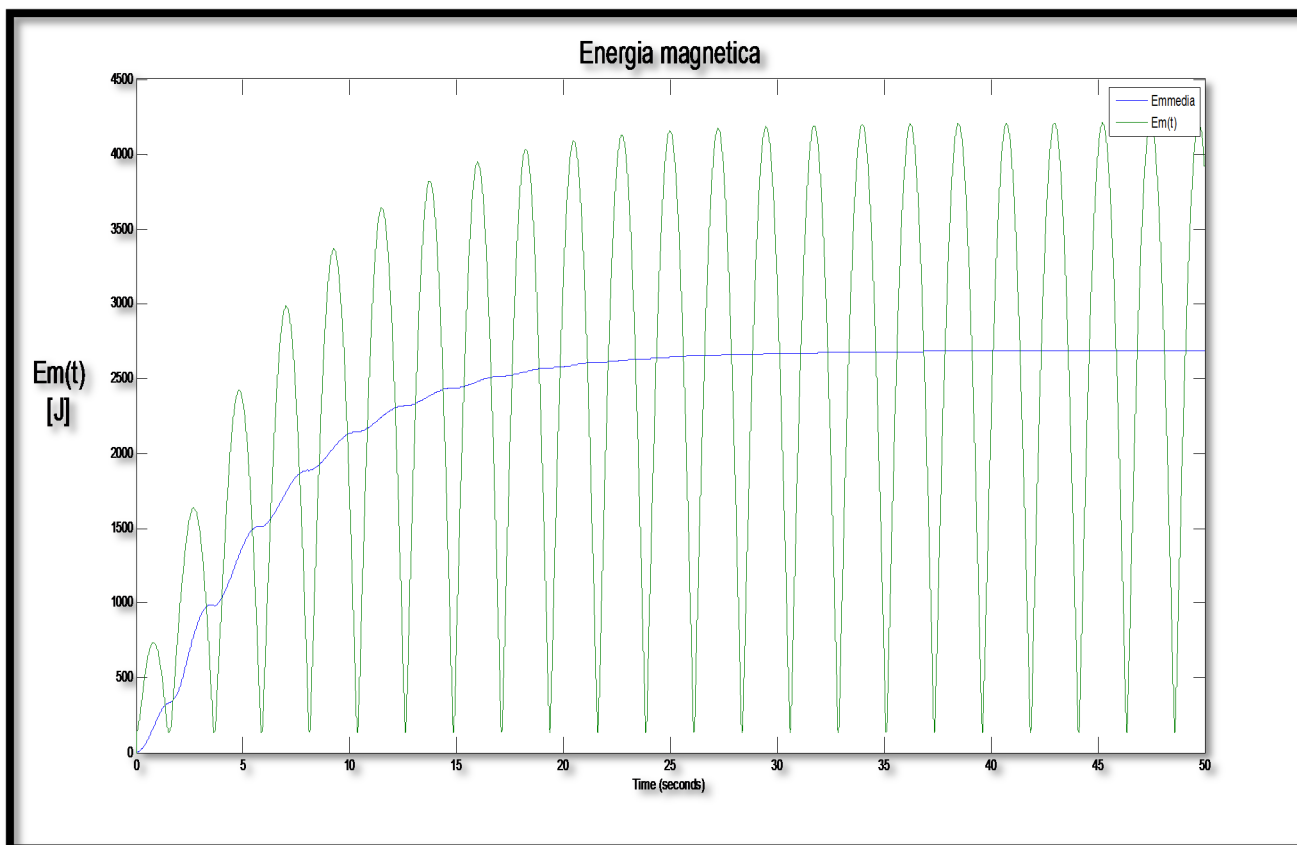


Figura 7.1-13: Energia magnetica immagazzinata nella macchina

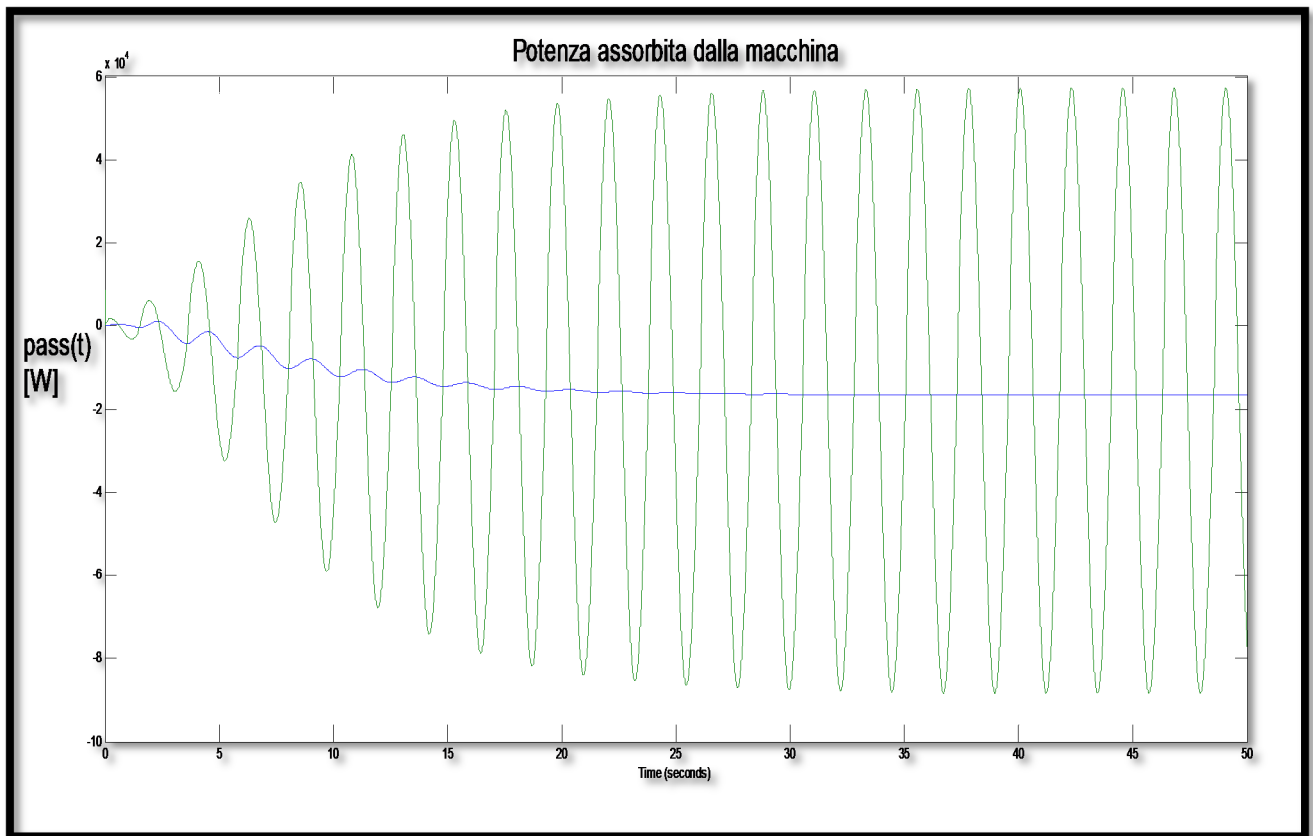


Figura 7.1-14: Potenza assorbita dalla macchina

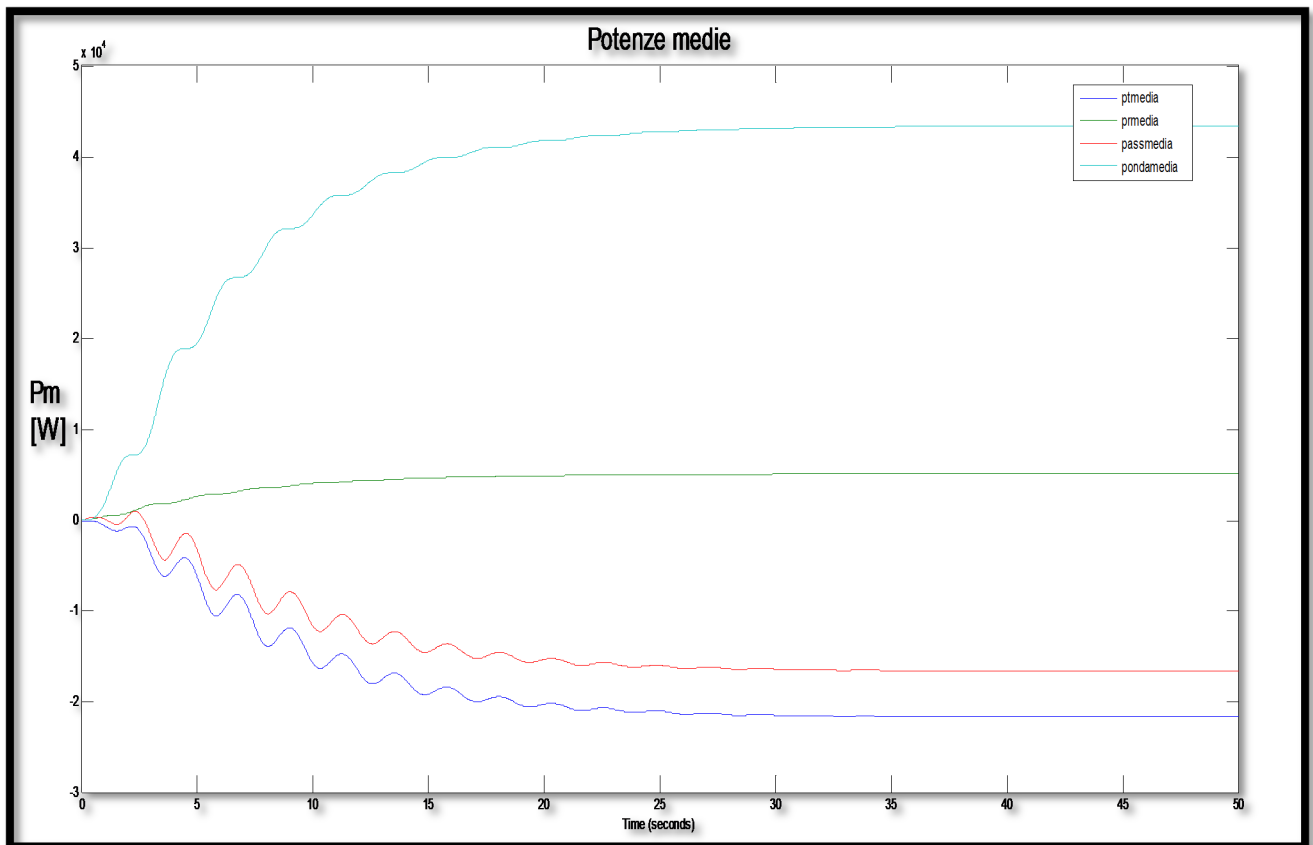


Figura 7.1-15: Potenze medie: d'onda (celeste), effetto joule (verde), rete (rosso), trasformata (blu)

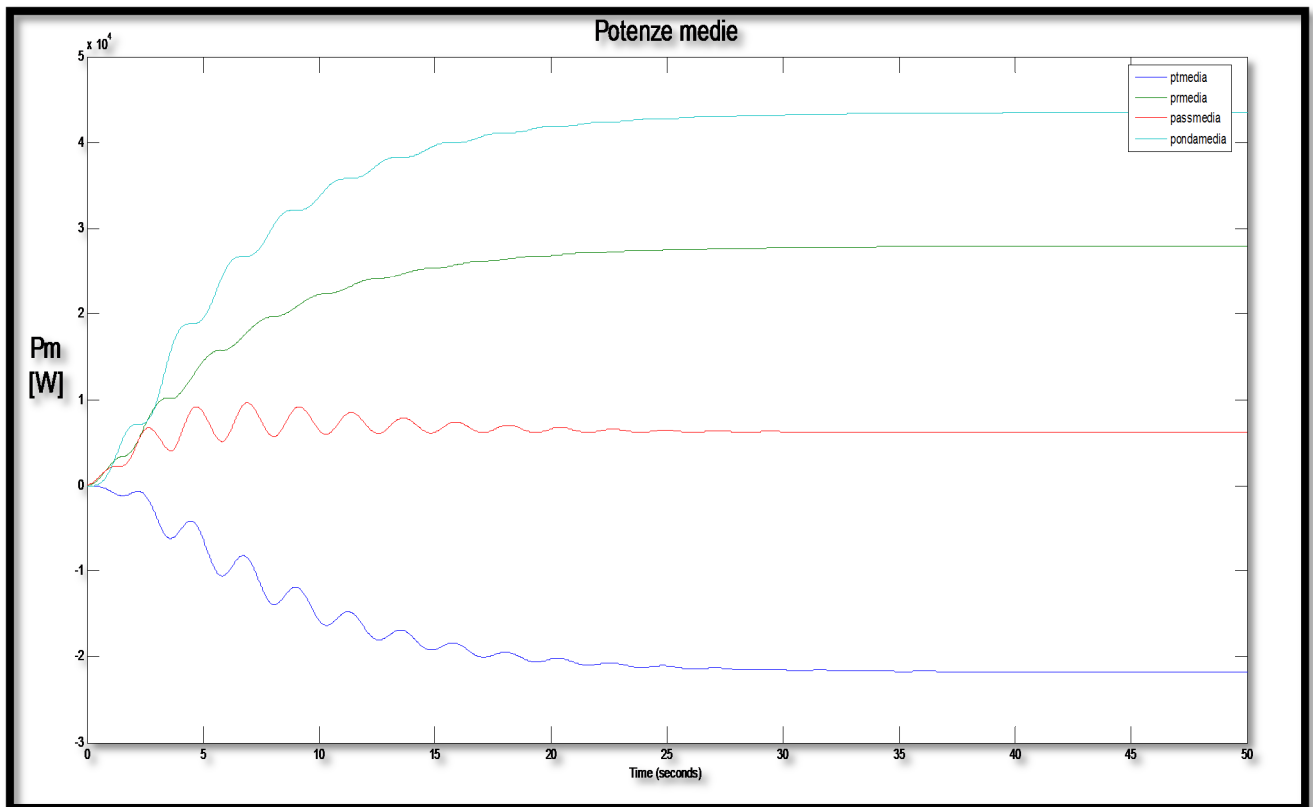


Figura 7.1-16: Potenze medie con resistenza aumentata: d'onda (celeste), effetto joule (verde), rete (rosso), trasformata (blu)

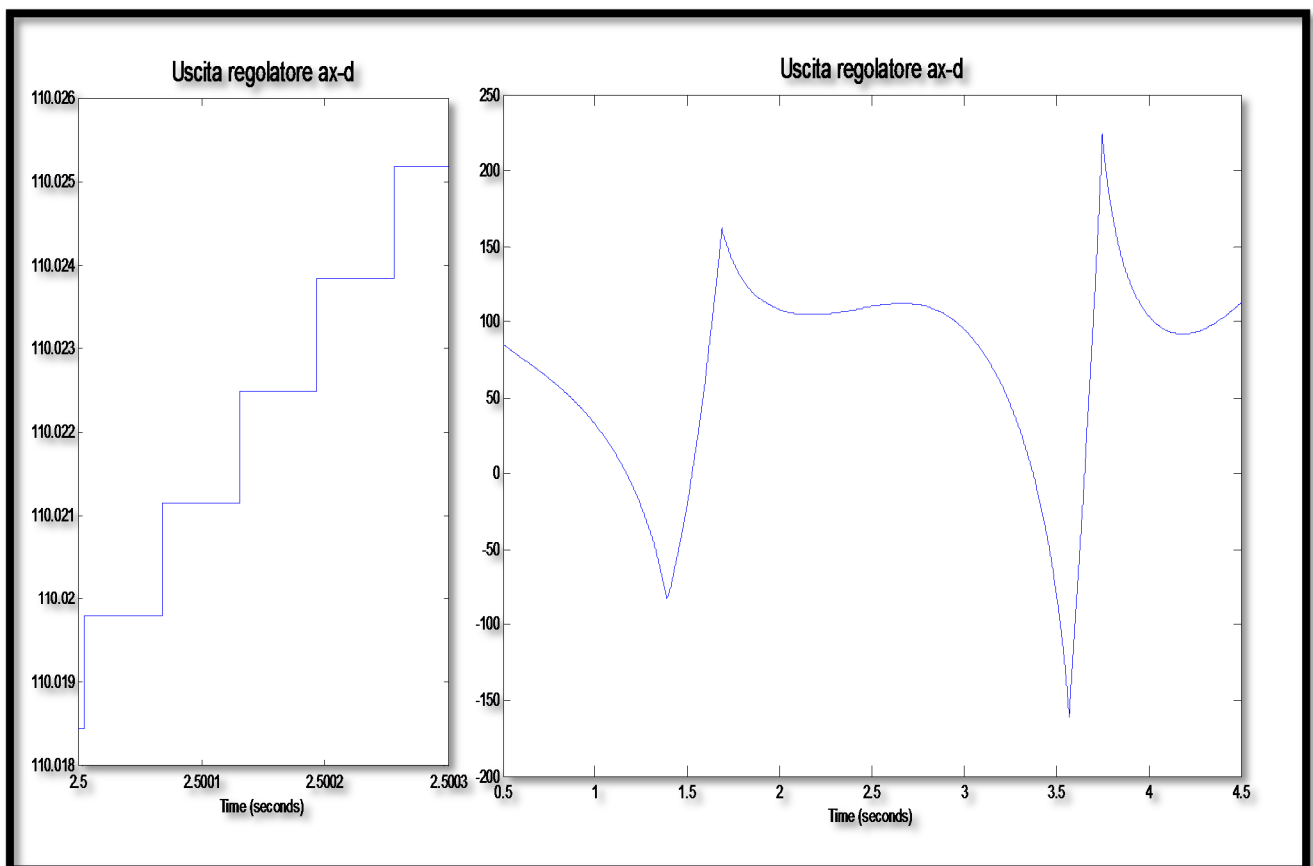


Figura 7.1-17: Forma d'onda in uscita dal regolatore discreto di asse-d

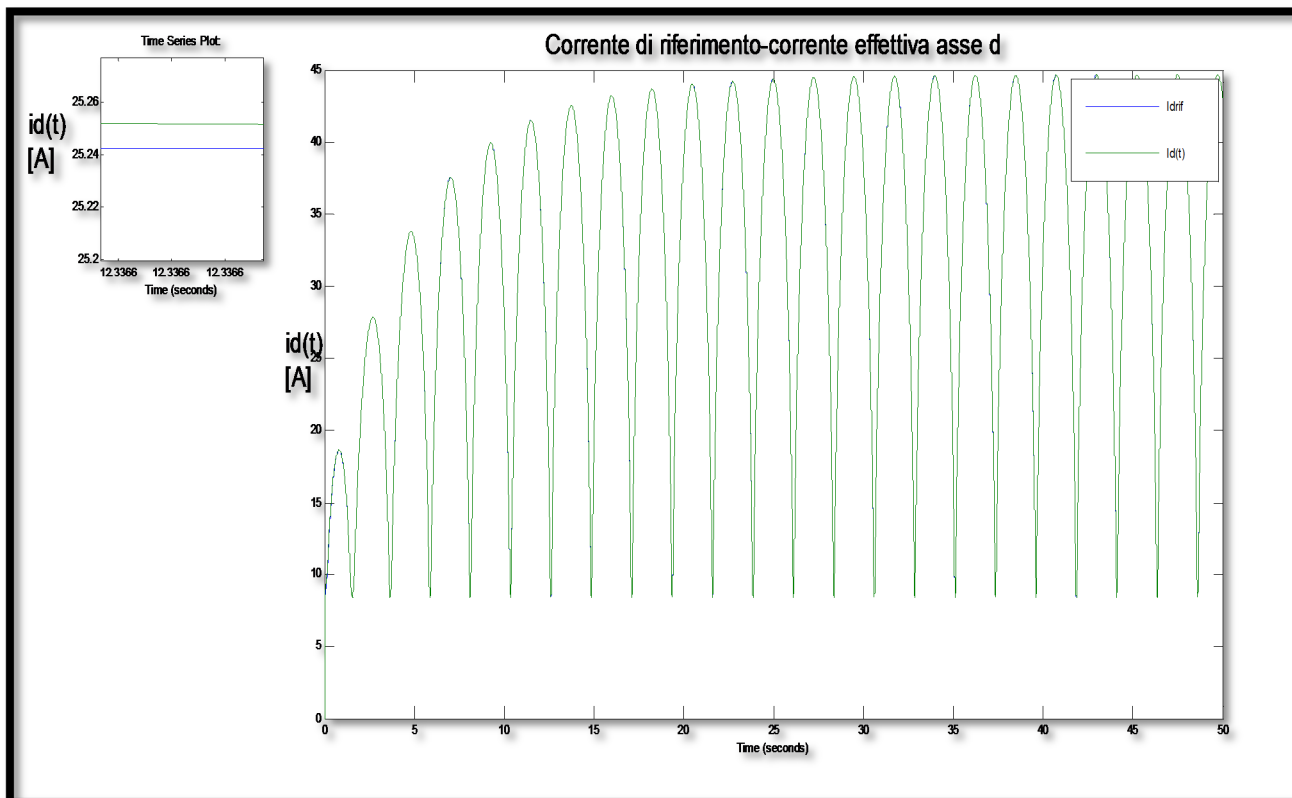


Figura 7.1-18: Corrente di riferimento ed effettiva (riquadro grande) Ingrandimento delle due grandezze (riquadro piccolo)

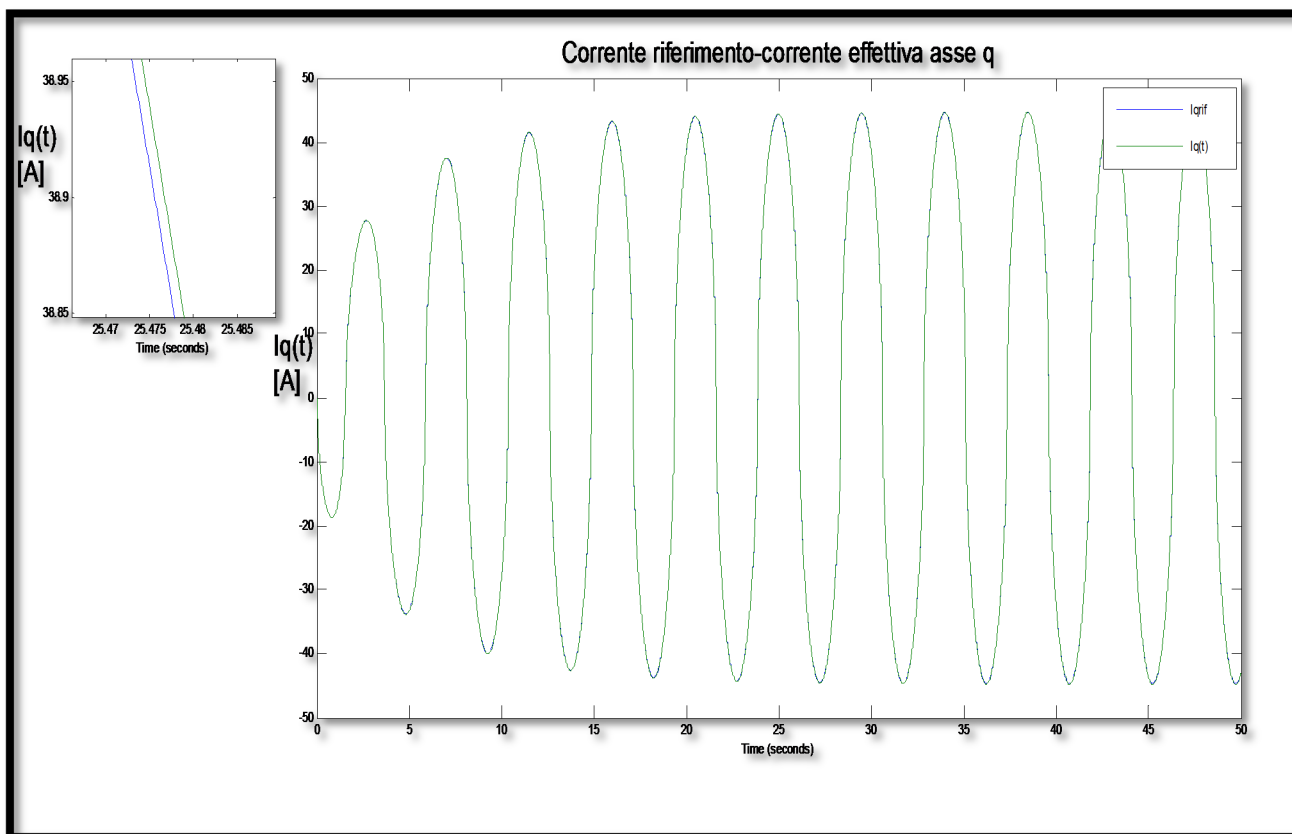


Figura 7.1-19: Corrente di riferimento ed effettiva (riquadro grande) Ingrandimento delle due grandezze (riquadro piccolo)

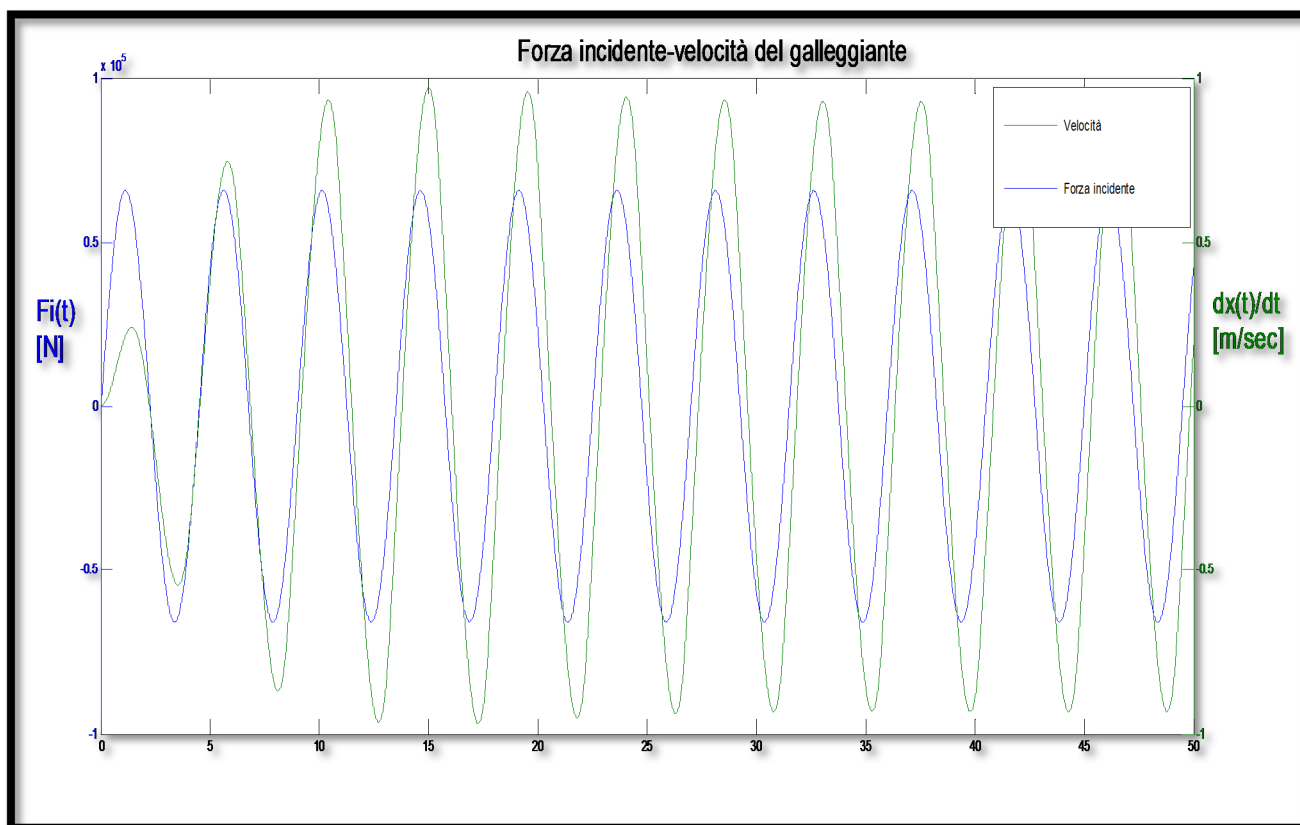


Figura 7.1-20: Forza incidente (blu) Velocità del galleggiante (verde)

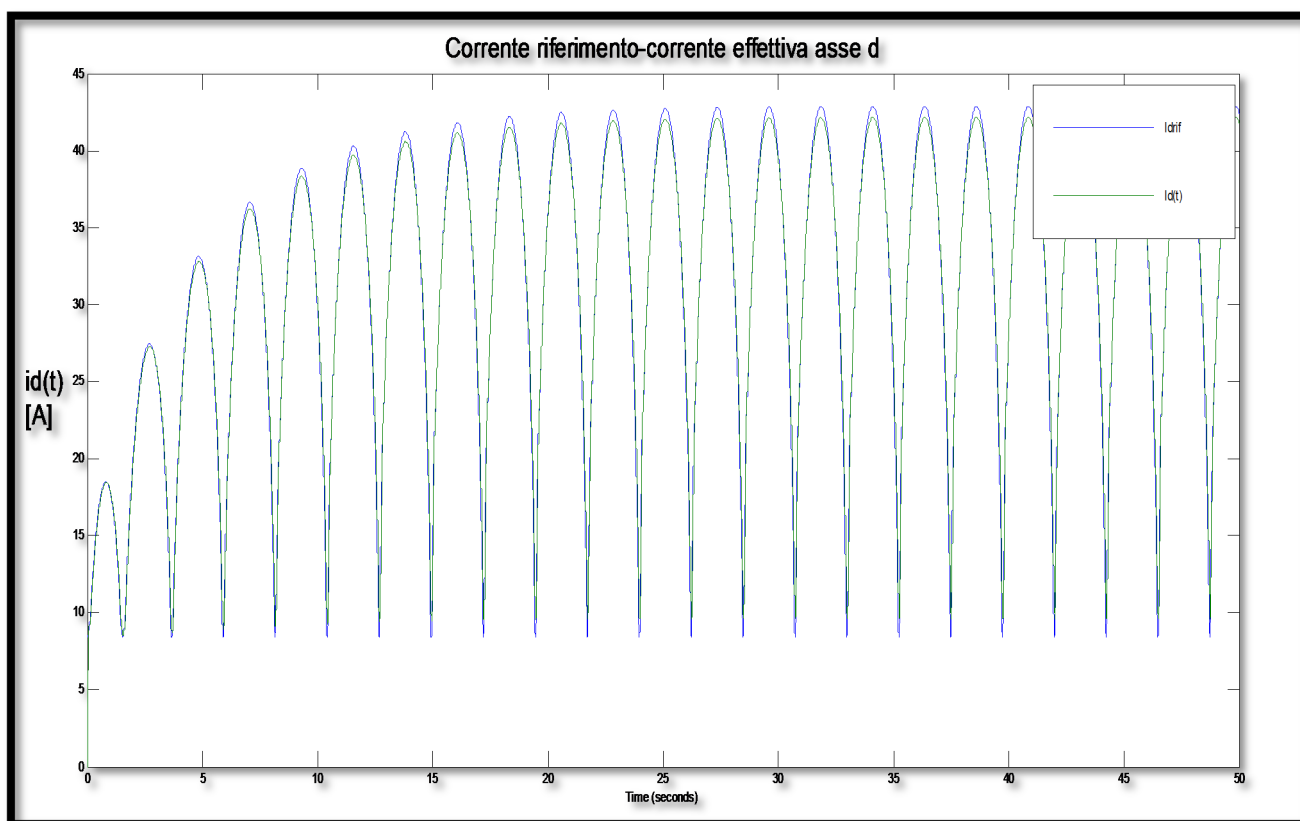


Figura 7.1-21: Corrente di riferimento ed effettiva di asse d con $T_{inv}=10ms$

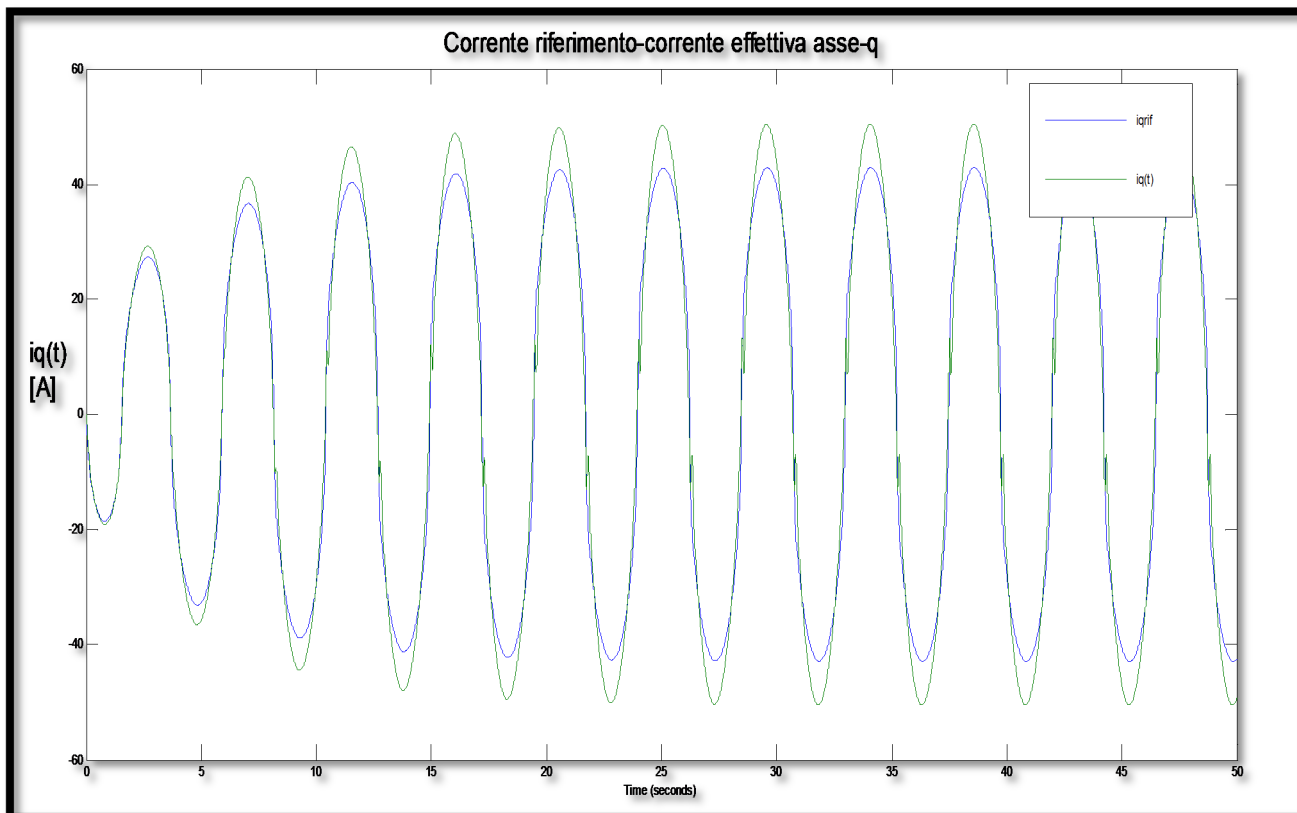


Figura 7.1-22: Corrente di riferimento ed effettiva di asse q con $T_{inv}=10\text{ms}$

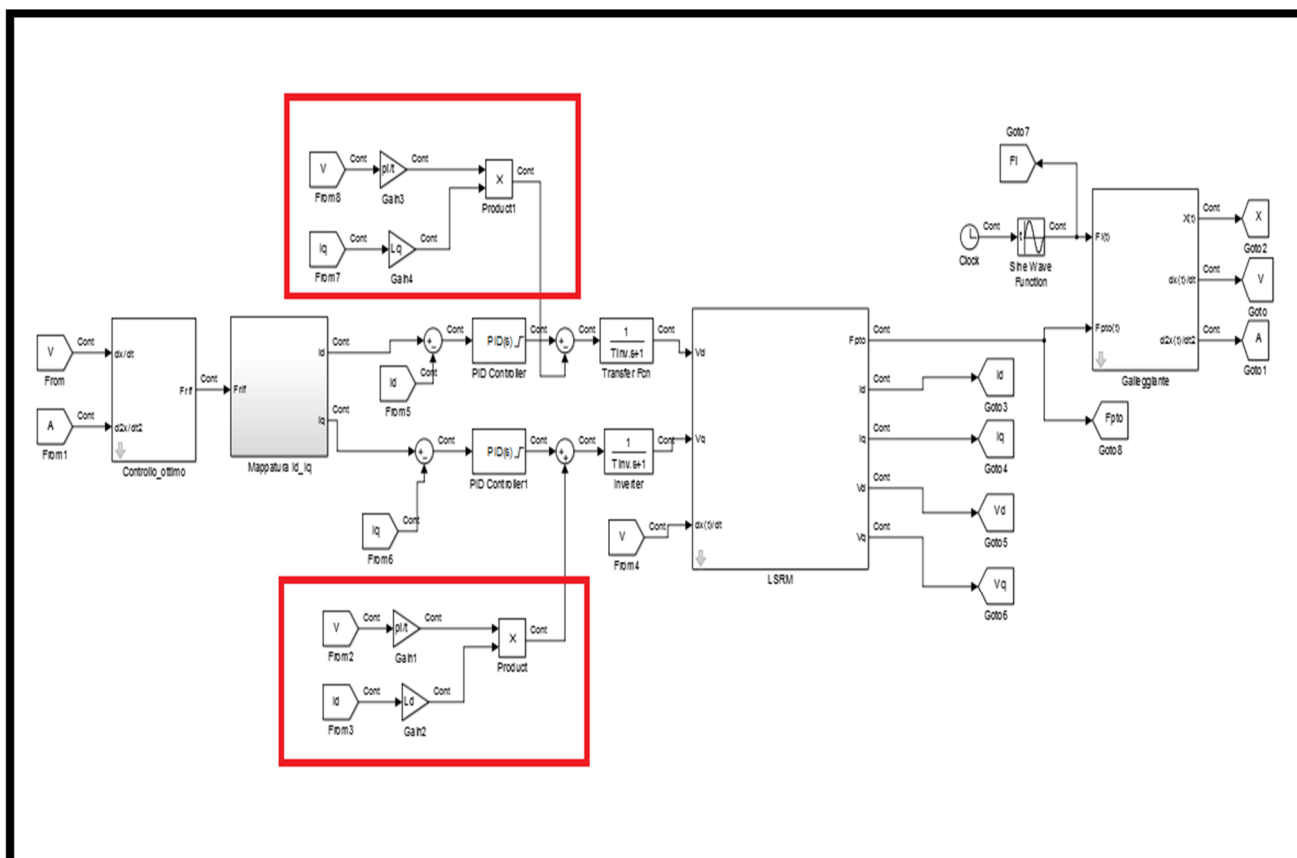


Figura 7.1-23: Modello con disaccoppiamento dei canali mutui.

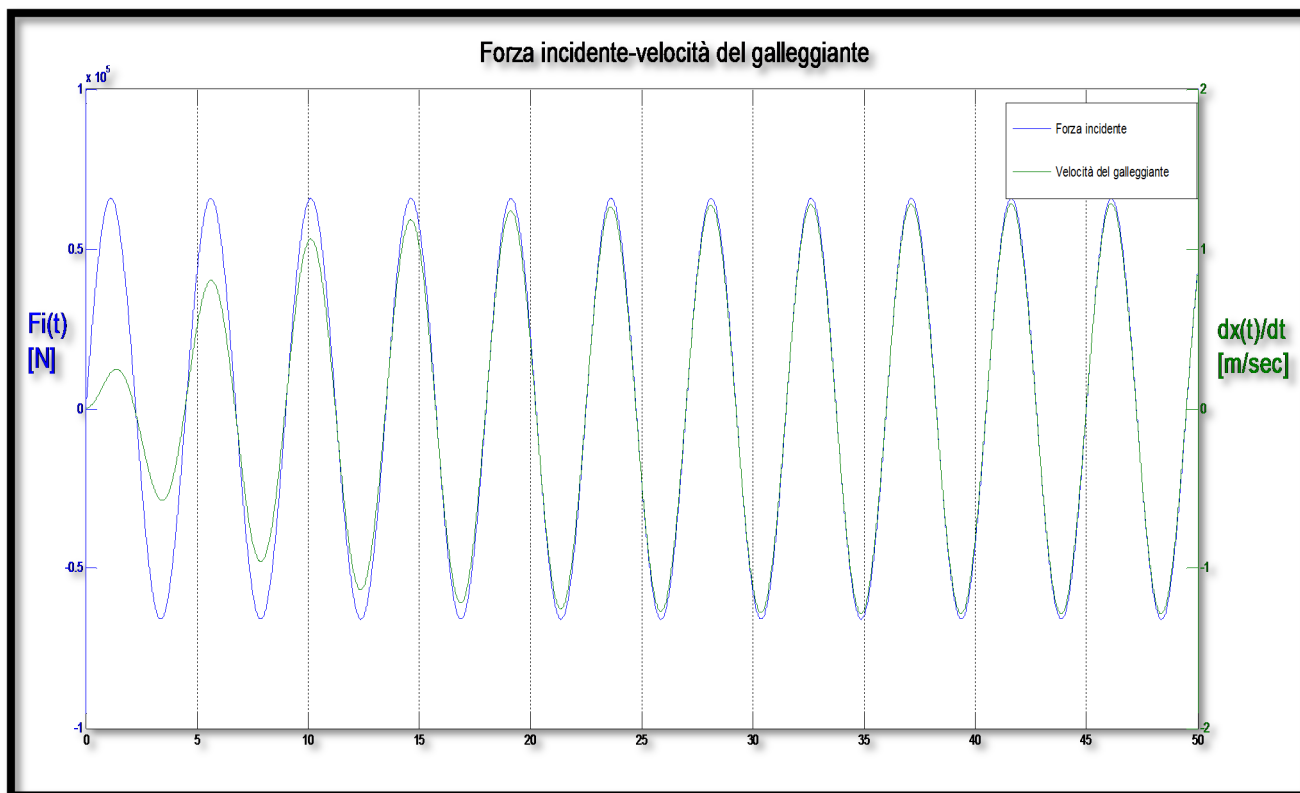


Figura 7.1-24: Forza incidente (blu) Velocità del galleggiante (verde) con canali mutui compensati

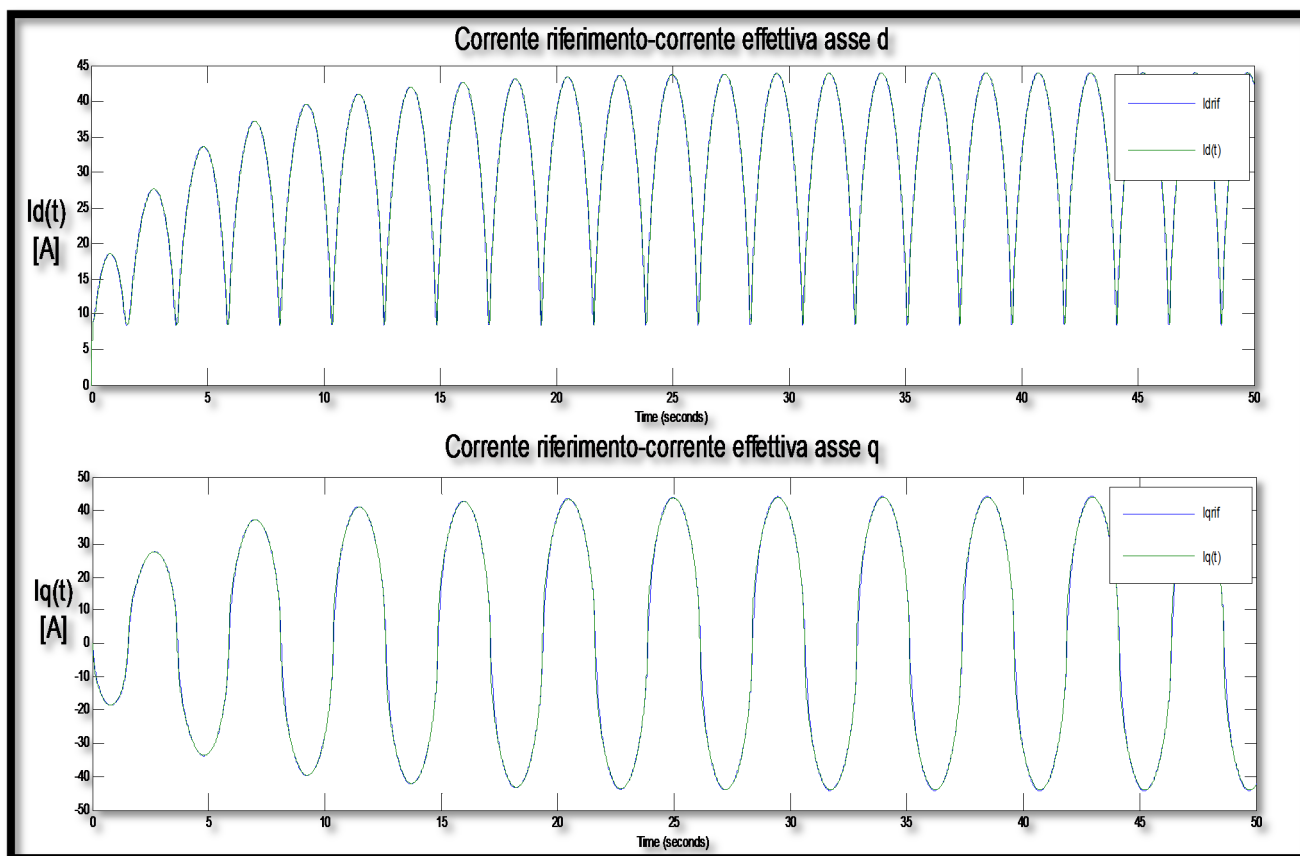


Figura 7.1-25: Corrente di riferimento ed effettiva di asse d (sopra) Corrente di riferimento ed effettiva di asse q (sotto)

8. Conclusioni e sviluppi successivi

Il modello descritto in questo elaborato rappresenta una prima architettura per la costruzione di un modello più completo che permetta la progettazione del convertitore da moto ondoso. Di seguito vengono elencati gli sviluppi successivi che si ritiene necessario effettuare per arrivare alla progettazione completa dei componenti:

1. Verifica delle prestazioni della macchina elettrica: in questo elaborato si è utilizzata la macchina sincrona a riluttanza variabile. E' stato preso il suo modello matematico che è funzione di determinati parametri, tra cui i fondamentali sono l'induttanza di asse diretto e quadratura. La differenza tra queste due induttanze sviluppa la forza elettromagnetica. Occorre valutare l'ordine di grandezza effettivamente ottenibile, allo stato tecnologico attuale, di questa differenza e le caratteristiche della macchina che corrispondano ad essa valutandone le dimensioni ed i pesi. Svolto questo studio si deciderà se sarà possibile l'utilizzo di questa macchina per questo genere di applicazioni o se sarà il caso di cambiare tipologia. Per compiere questa scelta si dovrà verificare se le dimensioni, i pesi, le forze in gioco (anche di repulsione/attrazione tra traslatore e rotore) sono compatibili con la struttura subacquea tipica di un WEC.
2. Miglioramento delle caratteristiche del modello: si va a modificare il modello costruendone uno più preciso per quanto riguarda i componenti. La forma migliore per il galleggiante, ad esempio, come emerge da vari testi in letteratura, non sembra essere perfettamente cilindrica, quindi è necessario un modello più accurato per la stima della forza di eccitazione.
Ovviamente la superficie ondosa non è una sinusoide; è possibile ottenere modelli più accurati che, note le distribuzioni di probabilità, valutano con una migliore accuratezza la/le forze che agiscono sul/sui galleggianti.
Occorre anche includere le perdite nel ferro ed implementare un modello più preciso dell'inverter-svm, per vedere come sono realmente le grandezze elettriche che alimentano la macchina.
3. Costruito il modello accurato dell'intero convertitore si può passare alla progettazione degli elementi fondamentali: tipologia di galleggiante, macchina elettrica e convertitori. Note le opportune funzioni di costo sarà possibile scegliere quale configurazione degli elementi elencati in precedenza è la migliore dal punto di vista tecnico ed economico. Nel compiere questo passo si deve valutare anche se è necessario cambiare la logica dell'algoritmo di controllo. Il controllo reattivo, se da un lato ha il vantaggio di estrarre la massima potenza ondosa possibile, presenta lo svantaggio di avere una marcata differenza tra la potenza di picco e la potenza media estratta, costringendo ad un inutile ed antieconomico sovradimensionamento dei componenti.

4. Prevedere dispositivi di taglio di potenza: in generale il WEC sarà progettato per lo stato di mare più frequente. Specialmente in ambito oceanico, come confermato da alcuni documenti presenti in letteratura, tra le potenze erogate in condizioni "normali" e le potenze erogate in condizioni estreme possono esserci diversi ordini di grandezza. Essendo sicuramente non economico progettare il convertitore per far fronte a potenze così elevate, che però si presentano piuttosto di rado, occorre prevedere dei dispositivi che tagliano la potenza erogata di fronte a condizioni di mare estreme.

Inoltre occorre curare in modo dettagliato la parte idraulica, i sistemi di galleggiamento e i materiali da utilizzare per rendere minimi gli interventi di manutenzione che risulteranno particolarmente gravosi per i sistemi off-shore.

Al termine dei punti indicati sopra si ha un modello completo e più dettagliato di un singolo Wave-Energy-Converter.

Resterà, infine, da decidere il numero di convertitori da installare nella wave-farm desiderata e progettare i vari componenti elettrici che consentono di trasportare l'energia fino alla rete.

9. Bibliografia

- [A.H. Techet] A.H. Techet, *Hydrodynamic Forces on Floating Bodies 13.42 Lecture Notes*, Massachusetts institute of technology
- [Baker 03] Baker, Nicholas Jon, *Linear generator for direct drive marine renewable energy converters* Durham University 2003
- [BDrew 09] BDrew*,ARPlummer, and MNSahinkaya, *A review of wave energy converter technology*, Department of Mechanical Engineering, University of Bath,Bath,UK (2009)
- [B. Moshfegh 11] B. Moshfegh *Marine and Ocean Technology volume 9*, World Renewable Energy Congress – Sweden (2011)
- [D.D. Bhatta 03] D.D. Bhatta , M. Rahman ,*On scattering and radiation problem for a cylinder in water of finite depth* ,International Journal of Engineering Science 41 (2003)
- [F. Ballio] F. Ballio, G. Guadagnini, S.Malavasi, E. Orsi, M. Riva, *Slide Meccanica dei fluidi I*, Politecnico di Milano Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale del Rilevamento (DIAR)
- [F. Fusco 12] Francesco Fusco, *Real-time Forecasting and Control for Oscillating Wave Energy Devices*, Tesi svolta presso National University of Ireland Maynooth (2012)
- [G. Marro 08] G.Marro, *Controlli automatici 5 edizione*, editore Zannichelli (2008)
- [H. E. Krogstad 00] Harald E. Krogstad, *Linear wave theory Part a Regular waves, Part b Random waves and wave statistics*, Norwegian university of science and technology Trondheim Norway (2000)
- [I. Boldea 97] I. Boldea *Linear Electric Actuator and Generator*, Cambridge University (1997)
- [Jonathan K.H. Shek 06] Jonathan K.H. Shek, D. Ewen Macpherson, and Markus A. Mueller, *Control of Linear Electrical Generators for Direct Drive Wave Energy Conversion* (2006)
- [K. Ruehl 11] Kelley Ruehl, *Time-Domain Modeling of Heaving Point Absorber Wave Energy Converters, Including Power Take-Off and Mooring*, Tesi svolta presso Oregon State University (2011)
- [L.Biagiotti] L.Biagiotti, *Implementazione digitale dei regolatori*, Slide ingegneri meccanica e del veicolo
- [M. Eriksson 05] M. Eriksson J. Isberg, M. Leijon, *Hydrodynamic modeling of a direct drive wave energy converter* International Journal of Engineering Science 43 (2005)
- [M. Richter 11] Markus Richter, *Different Model Predictive Control Approaches for Controlling Point Absorber Wave Energy Converters*, Tesi svolta presso Institute for Systemdynamics, University Stuttgart (2011)
- [R. Benifei 10] Riccardo Benifei, *Valutazione della disponibilità energetica dei moti ondosi per l'Alto Tirreno*, Tesi di laurea università di Firenze (2010)

10. Appendici

10.1. La trasformata di variabili

La trasformata di variabili ha lo scopo di semplificare le equazioni che descrivono il modello matematico della macchina eccessivamente complesse se scritte nelle variabili base (corrente/flusso-variabile meccanica α). Questa si applica alle grandezze elettriche

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{i}}(t)' = \mathbf{T}(\vartheta(t))^T \bar{\mathbf{i}}(t) \\ \bar{\boldsymbol{\psi}}'(\alpha(t), \bar{\mathbf{i}}'(t)) = \mathbf{T}(\vartheta(t))^T \bar{\boldsymbol{\psi}}(\alpha(t), \mathbf{T}(\vartheta(t)) \bar{\mathbf{i}}'(t)) \\ \bar{\mathbf{v}}'(\alpha(t), \bar{\mathbf{i}}'(t)) = \mathbf{T}(\vartheta(t))^T \bar{\mathbf{v}}(\alpha(t), \mathbf{T}(\vartheta(t)) \bar{\mathbf{i}}'(t)) \end{cases} \quad (10.11)$$

Occorre notare come nel caso trattato il parametro ϑ sia uno scalare, ma in generale può anche essere un vettore. Le fasi di statore possono essere collegate a stella o a triangolo, questo comporta un vincolo tra tensioni e correnti dovuto ai principi di Kirchoff:

-Collegamento a stella:

$$\mathbf{i}_1(t) + \mathbf{i}_2(t) + \mathbf{i}_3(t) = \bar{\mathbf{i}}(t)^T \bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0} \quad \forall t \quad (10.12)$$

-Collegamento a triangolo:

$$\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t) + \mathbf{v}_3(t) = \bar{\mathbf{v}}(t)^T \bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0} \quad \forall t \quad (10.13)$$

Questo vuol dire che in un caso il vettore delle correnti e in un caso le tensioni in ogni istante di tempo appartengono ad un sottospazio vettoriale ortogonale al vettore unitario. Se descrivo questi vettori da una nuova base in cui due versori appartengono al sottospazio, le grandezze trasformate avranno due sole componenti e una identicamente nulla. La matrice che effettua questa trasformazione è scelta ortonormale del tipo:

$$\mathbf{T}_p(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\theta - \frac{4}{3}\pi) & -\sin(\theta - \frac{4}{3}\pi) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

Chiamata matrice di Park. Per $\varphi=0$ otteniamo la base di Clarke:

$$T_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & +\sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

La Figura 10.1-1 mostra il piano di Clarke a cui appartengono i versori ad eccezione del versore z che è a questo piano ortogonale.

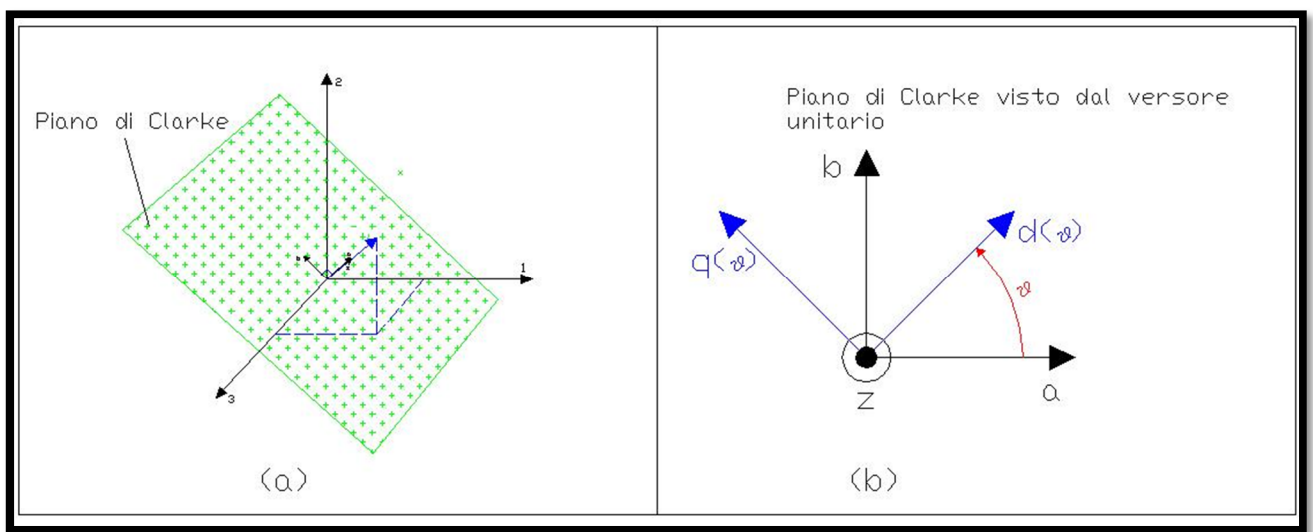


Figura 10.1-1: (a) Piano di Clarke sulla base di partenza (b) Base di Parck (d,q,z) e di Clarke (a,b,z)

Andando ad eseguire la trasformazione alle varie grandezze elettriche e proseguendo con la trattazione analitica si osserva che la maggiore semplificazione si ha quando:

$$\theta(t) = p\alpha(t) \quad (10.16)$$

Che è detta scelta canonica. Svolgendo i calcoli si osserva che la matrice delle induttanze trasformata risulta diagonale e con termini costanti. In particolare il circuito di asse z diventa:

$$v_z(t) = R_s i_z(t) + L_z \frac{di_z(t)}{dt} \quad (10.17)$$

Che rappresenta un semplice circuito R-L. Esplicitando le componenti z della trasformazione (10.11) si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_z(t) = (\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t) + \mathbf{v}_3(t)) \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \mathbf{i}_z(t) = (\mathbf{i}_1(t) + \mathbf{i}_2(t) + \mathbf{i}_3(t)) \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (10.18)$$

Come visto in precedenza nel caso di collegamento a stella tra le fasi la somma delle tre correnti è nulla e perciò il circuito di asse z non è interessato da nessuna corrente e quindi anche la tensione di asse z sarà nulla. Nel caso di collegamento a triangolo la componente di tensione di asse z è nulla, ammesso che vi sia una corrente iniziale questa decadrebbe a zero con un transitorio tipico di un circuito R-L, ingegneristicamente si ritiene di poter trascurare questo transitorio viste le tipiche costanti di tempo e quindi anche in questo caso il circuito di asse z ha tutte grandezze nulle. E' facile dimostrare che, essendo la matrice di Park ortonormale, esiste un'equivalenza tra le potenze assorbite dalla macchina e le potenze di Park, vale infatti per tutte le componenti di tensione:

$$\mathbf{p}'(t) = \bar{\mathbf{v}}(t)'^T \bar{\mathbf{i}}'(t) = \bar{\mathbf{v}}(t)^T \mathbf{T} \mathbf{p}(\theta(t))^T \mathbf{T} \mathbf{p}(\theta(t)) \bar{\mathbf{i}}(t) = \bar{\mathbf{v}}(t)^T \bar{\mathbf{i}}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (10.1-9)$$

10.2. La space vector modulation

La tecnica che viene illustrata in questo paragrafo rappresenta una possibile logica di comando dell'inverter. Uno schema semplificato di un inverter trifase è mostrato Figura 10.2-1 dove il convertitore alimenta un carico a stella.

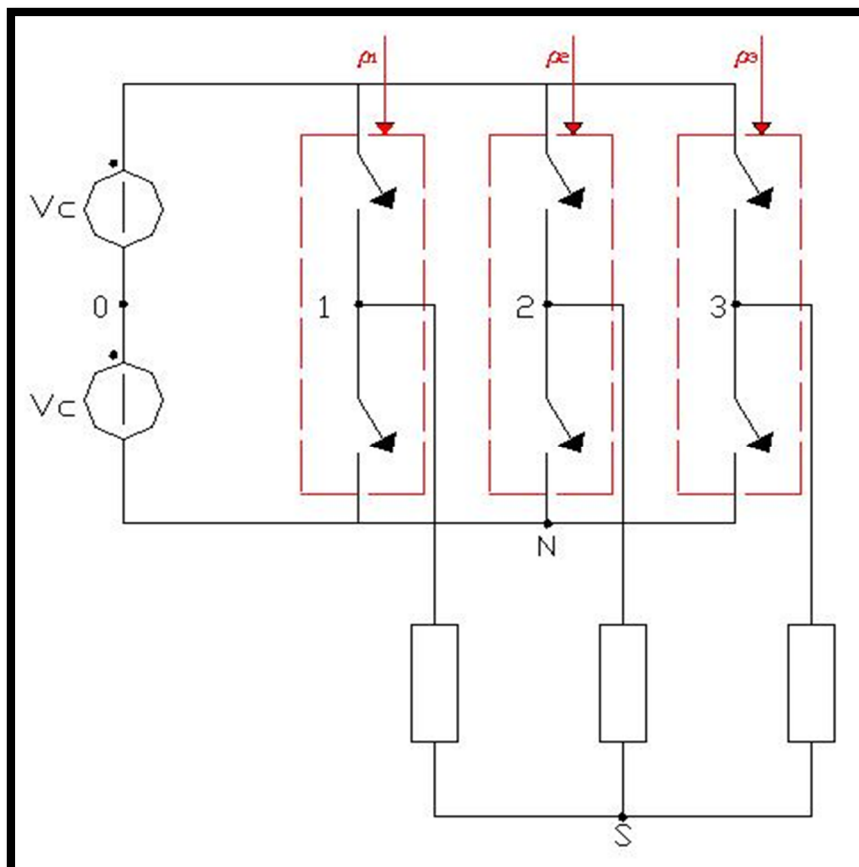


Figura 10.2-1: Inverter trifase che alimenta un carico a stella

Analizzando una gamba di un inverter trifase si osserva che le configurazioni possibili sono solo due, cioè quando uno dei due tasti è chiuso e l'altro è aperto e viceversa. Ammettendo che l'inverter è alimentato da una sorgente di tensione, e che alimenta un carico induttivo (sorgente di corrente) si avrebbero situazioni dannose per il convertitore sia nel caso in cui entrambi i tasti di una gamba si trovassero contemporaneamente chiusi (maglia impropria) sia nel caso in cui si trovassero entrambi aperti (insieme di taglio improprio). Per questo motivo i dispositivi che compongono la gamba sono tali da consentire la conduzione di un tasto per volta.

Lo stato di una singola gamba può quindi essere identificato da una funzione rettangolare nel tempo che vale 1 se è attivo il tasto superiore e 0 se è attivo quello inferiore:

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{attivo tasto superiore} \\ 0 \rightarrow \text{attivo tasto inferiore} \end{cases}$$

Quanto detto vale per tutte e tre le gambe quindi è possibile definire:

$$\bar{\rho}(t) \triangleq \begin{Bmatrix} \rho_1(t) \\ \rho_2(t) \\ \rho_3(t) \end{Bmatrix} \quad (10.22)$$

La combinazione delle tre gambe darà quindi la possibilità di avere a disposizione $2^3=8$ stati:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Da cui il vettore di tensione tra il punto mediano di una gamba ed il neutro vale:

$$\bar{v}_N(t) = 2V_c \bar{\rho}(t) \quad (10.21)$$

Il vettore delle tensioni rappresentato su uno sistema di riferimento tridimensionale avrà ampiezza $2V_c$. L'origine del vettore coincide con l'origine degli assi e la sua fine coincide con uno dei vertici di un cubo di ampiezza $(2V_c)$. In Figura 10.2-3 è mostrato il cubo degli stati del convertitore che se considerassimo i lati lunghi $2V_c$ rappresenta anche il cubo delle tensioni tra punto mediano della gamba e neutro.

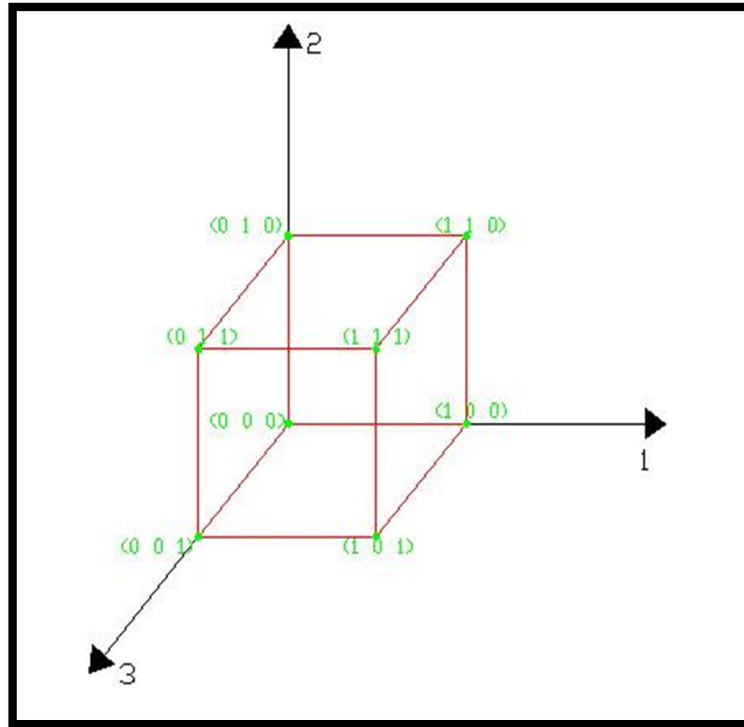


Figura 10.2-3: Cubo rappresentativo dei possibili stati del convertitore

E' possibile definire le altre tensioni e stabilire i vari legami:

$$\bar{v}_0(t) = \begin{Bmatrix} v_{10}(t) \\ v_{20}(t) \\ v_{30}(t) \end{Bmatrix} \quad (10.22)$$

Da cui:

$$\bar{v}_0(t) = \begin{Bmatrix} v_{10}(t) \\ v_{20}(t) \\ v_{30}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{1n}(t) \\ v_{2n}(t) \\ v_{3n}(t) \end{Bmatrix} + v_{n0}\bar{1} = \bar{v}_n(t) - V_c\bar{1} \quad (10.23)$$

Quindi il vettore delle tensioni tra i punti mediani di gamba e punto mediano dei generatori è uguale alla tensione $\bar{v}_N(t)$ a meno di uno spostamento pari a V_c nella direzione della diagonale del cubo. Si descrivere così il medesimo cubo, ma con centro nell'origine. In generale è necessario controllare la tensione con cui alimentiamo una fase della macchina quindi:

$$\bar{v}_s(t) = \begin{Bmatrix} v_{1s} \\ v_{2s} \\ v_{3s} \end{Bmatrix} \quad (10.24)$$

Si può dimostrare che il legame tra le varie grandezze introdotte è del tipo:

$$\bar{v}_s(t) = \left(U - \frac{\overline{11^T}}{3} \right) \bar{v}_N(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} 2V_c \bar{p}(t) \quad (10.25)$$

Quindi controllando lo stato dei tasti nelle gambe del convertitore posso controllare la tensione sulle fasi della macchina.

L'obiettivo che il convertitore deve perseguire è quello di approssimare il meglio possibile la forma d'onda che viene fornita dal regolatore. Supponendo che la tensione di uscita dal regolatore sia una forma d'onda periodica con periodo T come mostrato in , l'approccio seguito per comandare le gambe dell'inverter è chiamato approccio locale.

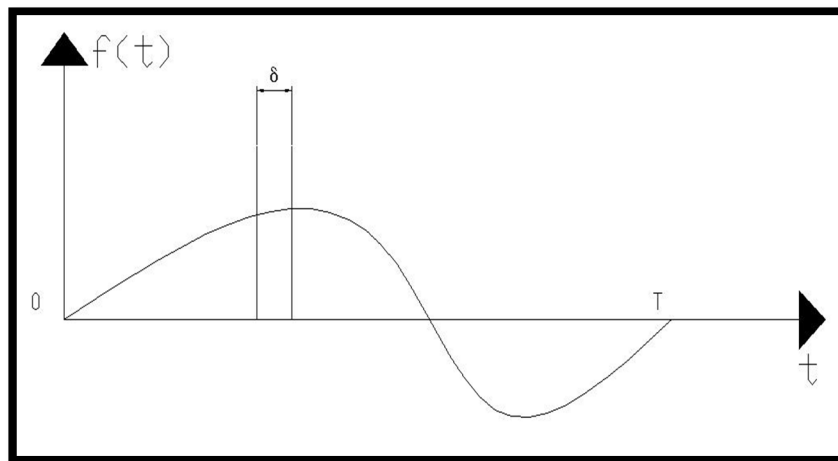


Figura 10.2-4: Forma d'onda che devo ottenere con il regolatore

L'inverter è in grado di fornire tensioni di fase rettangolari e non continue. L'approccio locale consiste nel dividere il periodo in molti intervalli più piccoli detti sub-intervalli (d). In ciascun sub-intervallo la logica prevede di uguagliare il valore medio della funzione in uscita dai regolatori con il valore medio della onda rettangolare in uscita dall'inverter (onda approssimante). Questo approccio si basa sulla riduzione dell'errore tra lo spettro in frequenza della funzione in uscita dal regolatore e la funzione approssimante. In particolare si prendere in considerazione solo un numero finito di armoniche su cui calcolare l'errore, questo numero sarà tanto più grande quanto più piccolo è il sub-intervallo. Al tendere del sub-intervallo a zero l'errore tra lo spettro della funzione approssimante e lo spettro della funzione reale tende a zero. Quindi la scelta della dimensione del sub-intervallo (i sub-intervalli possono essere anche diversi tra loro) determinerà la precisione della funzione approssimante. Se un singolo sub-intervallo è diviso ad esempio in tre parti e per ognuna di esse si va ad imporre una tensione realizzabile con il convertitore:

$$\bar{v}_u(t) = \begin{cases} \bar{V}_a & \forall t \in \delta_a \\ \bar{V}_b & \forall t \in \delta_b \\ \bar{0} & \forall t \in \delta_0 \end{cases} \quad (10.26)$$

Il valore medio sul sub-intervallo vale:

$$\bar{v}_m(t) = \frac{1}{\delta} \int_{\delta} \bar{v}_u(t) dt = \frac{\bar{V}_a \delta_a + \bar{V}_b \delta_b + \bar{0} \delta_0}{\delta} = \bar{V}_a \tau_a + \bar{V}_b \tau_b \quad (10.2-7)$$

Dove vale ovviamente:

$$\frac{\delta_a + \delta_b + \delta_0}{\delta} = \tau_a + \tau_b + \tau_0 = 1 \quad (10.28)$$

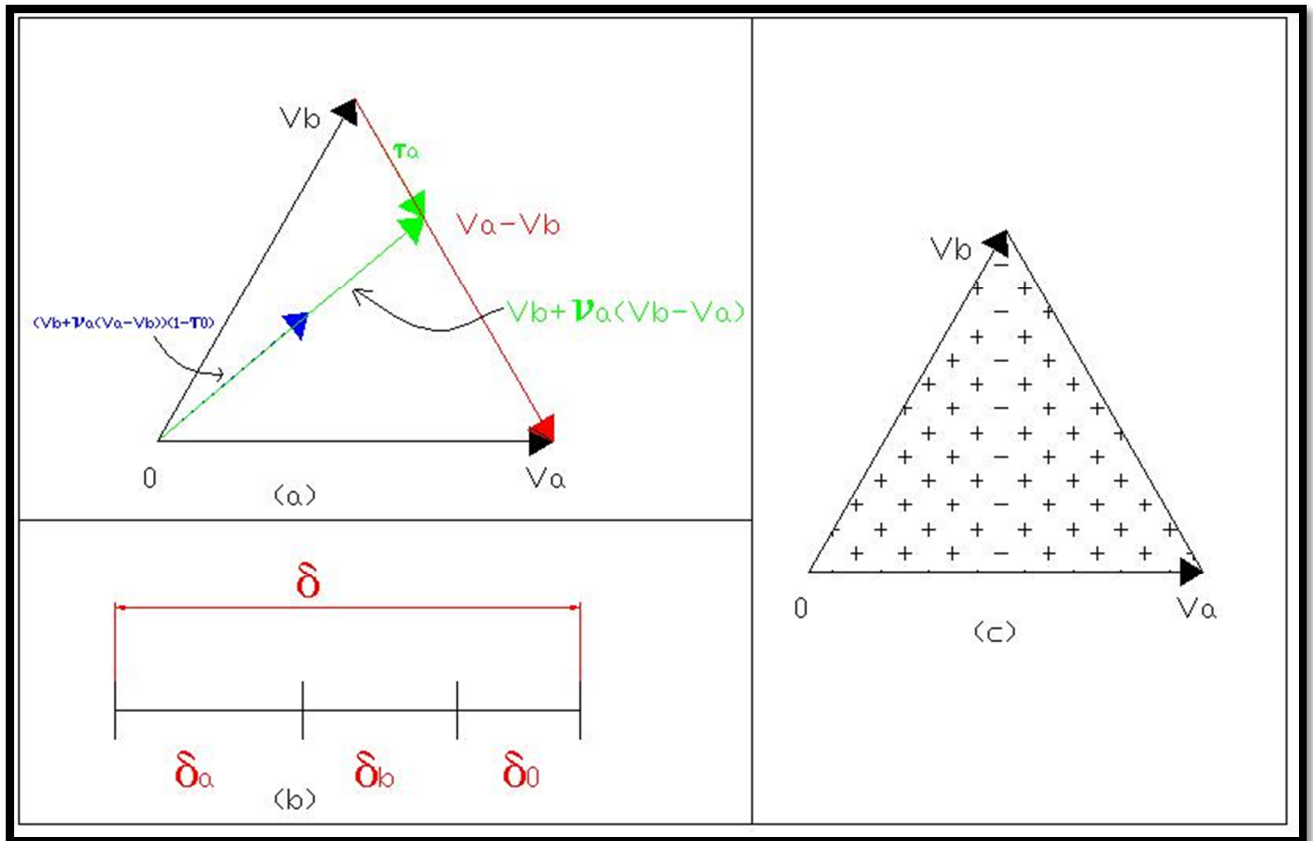


Figura 10.2-5: Vettori delle tensioni (a) Sub-intervallo (b) Vettori di tensione ottenibili (c) Settore dei vettori ottenibili

Definendo:

$$v_a \triangleq \frac{\tau_a}{\tau_a + \tau_b} \quad (10.29)$$

E' possibile scrivere il valore medio come:

$$\bar{v}_m(t) = (1 - \tau_0)(\bar{V}_b + v_a(\bar{V}_a - \bar{V}_b)) \quad (10.210)$$

Dove:

$$\begin{cases} \tau_a \in [0; 1 - \tau_0] \\ v_a \in [0; 1] \\ 1 - \tau_0 \in [0; 1] \end{cases} \quad (10.211)$$

In Figura 10.2-5c è mostrato il settore che posso ottenere agendo sui parametri definiti in (10.211). E' possibile aumentare i livelli di tensione in un sub-intervallo migliorando le capacità di rappresentare il vettore delle tensioni medio. Ad esempio combinando tre vettori di tensione ed uno stato nullo è possibile rappresentare un vettore delle tensioni che appartiene ai vari tetraedri presenti nel cubo come mostrato in Figura 10.2-6.

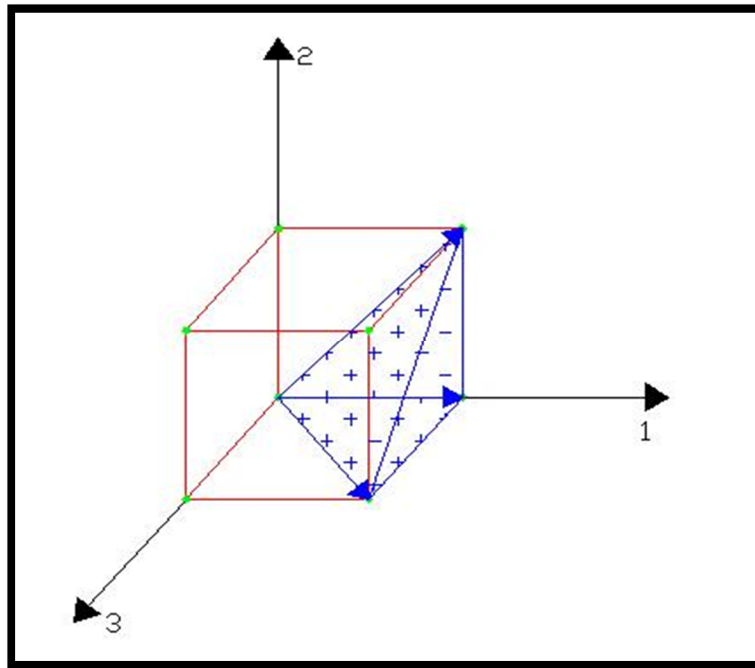


Figura 10.2-6: Tetraedro ottenibile con tre livelli di tensione più un livello nullo agenti in un sub-intervallo

La macchina che viene alimentata con il convertitore è descritta secondo il modello di Park, il convertitore dovrà quindi erogare solo le tensioni di asse diretto e quadratura che come noto appartengono ad un piano ortogonale al vettore unitario (piano di Clarke)²⁶.

²⁶ Come mostrato in Appendice 10.1

$$\hat{v}_N = v_{nd} + jv_{nq} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \mathbf{1} + j\mathbf{0} \quad -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2} \right\} \bar{v}_N = \sqrt{\frac{2}{3}} 2V_c \left(e^{i0} \rho_1 + e^{i\frac{2}{3}\pi} \rho_1 + e^{i\frac{4}{3}\pi} \rho_1 \right) \quad (10.2-12)$$

Quindi applicando la (10.212) è possibile ottenere i valori del cubo delle tensioni proiettati sul piano di Clark da cui si ottiene l'esagono di Figura 10.2-7, dove i vettori in blu hanno norma $\sqrt{\frac{2}{3}} 2V_c$.

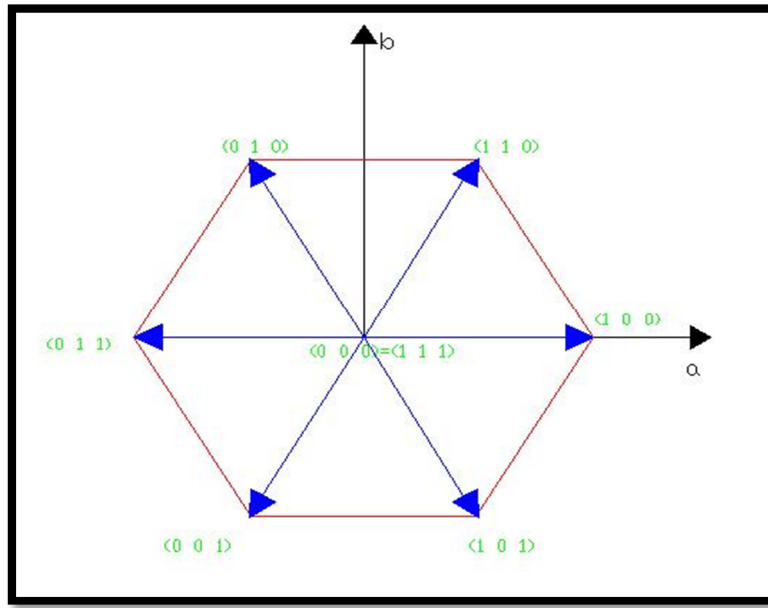


Figura 10.2-7: Esagono delle tensioni

Se si utilizzano due stati attivi e uno nullo in un sub-intervallo come mostrato in Figura 10.2-5, è possibile costruire un valore medio delle tensioni che ha come origine l'origine del piano di Clarke e come fine un qualsiasi punto all'interno dell'esagono delle tensioni. Per concludere si calcolano i valori dei parametri per realizzare un certo valore di tensione. Si suppone che nel sub-intervallo in considerazione imponendo l'uguaglianza dei valori medi tra il segnale di uscita dal regolatore e approssimante si debba realizzare una tensione media in termini di vettore di Park complesso rappresentativo pari a \hat{v}_R . Se si utilizzano due livelli di tensione più un valore nullo è possibile scrivere:

$$\hat{v}_R = \tau_A \hat{v}_A + \tau_B \hat{v}_B \quad (10.213)$$

Dove \hat{v}_A, \hat{v}_B sono due vettori dell'esagono (vettori di colore blu in Figura 10.2-7).

Moltiplicando entrambi i membri della (10.213) per \hat{v}_A^* (con l'asterisco si indica il vettore complesso coniugato) si ottiene:

$$\hat{v}_A^* \hat{v}_R = \tau_A |\hat{v}_A|^2 + \tau_B \hat{v}_A^* \hat{v}_B \quad (10.214)$$

Se considero la sola parte immaginaria nel membro di destra rimane solo il termine contenente τ_B da cui:

$$\tau_B = \frac{\text{Im}(\hat{v}_A^* \hat{v}_R)}{\text{Im}(\hat{v}_A^* \hat{v}_B)} \quad (10.215)$$

In modo del tutto analogo è possibile calcolare:

$$\tau_A = \frac{\text{Im}(\hat{v}_B^* \hat{v}_R)}{\text{Im}(\hat{v}_A^* \hat{v}_B)} \quad (10.216)$$

Quindi sfruttando la (10.28) si ottiene:

$$\tau_0 = 1 - \tau_A - \tau_B \quad (10.217)$$

In conclusione grazie alle (10.215),(10.216),(10.217) noto il riferimento da realizzare ed i due vettori con cui voglio realizzarlo (può esserci più di un modo solo se il vettore ha la sua freccia in un punto sufficientemente vicino al centro dell'esagono), viene deciso come suddividere il sub-intervallo.

10.3. Realizzazione della funzione di trasferimento discreta

In questo paragrafo mostra come sia possibile trasformare una funzione di trasferimento discreta in un algoritmo ricorsivo ed implementabile sul microcontrollore²⁷.

Sia la funzione di trasferimento del controllore del tipo:

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (10.31)$$

Da questa è possibile scrivere:

$$Y(z)(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) = U(z)(b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) \quad (10.3-2)$$

Dove le grandezze per la definizione di Z-trasformata:

$$\begin{cases} U(z) = Z\{u(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = u(0) + u(1) z^{-1} + \dots + u(n) z^{-n} + \dots \\ Y(z) = Z\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} = y(0) + y(1) z^{-1} + \dots + y(n) z^{-n} + \dots \end{cases} \quad (10.33)$$

Poniamo la (10.32) nella forma:

$$Y(z) z^n = Y(z)(-a_{n-1} z^{n-1} - \dots - a_0) + U(z)(b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) \quad (10.3-4)$$

Sostituendo le espressioni (10.33) in (10.34) si ottiene:

-membro di sinistra:

$$z^n (\sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}) = y(0) z^n + y(1) z^{n-1} + \dots + y(n) z^0 + y(n+1) z^{-1} + \dots + y(n+h) z^{-h} + \dots \quad (10.3-5)$$

-primo termine del membro di destra:

²⁷ Come mostrato in [G. Marro 08]

$$\begin{aligned}
& (\sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}) (-a_{n-1}z^{n-1} - \dots - a_0) = \\
& (-y(0)a_0 - \dots y(n-1)a_{n-1})z^0 + (-y(1)a_0 - \dots y(n)a_{n-1})z^1 + \dots (-y(h)a_0 - \dots y(n-1+h) \\
& a_{n-1})z^{-h} + \dots \dots
\end{aligned} \tag{10.3-6}$$

-secondo termine di destra:

$$\begin{aligned}
& (\sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}) (b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0) = (u(0)b_0 + \dots u(m)b_m)z^0 + (u(1)b_0 + \dots u(m+ \\
& 1)b_m)z^{-1} + \dots + (u(h)b_0 + \dots u(m+h)b_m)z^{-h} + \dots.
\end{aligned} \tag{10.3-7}$$

Uguagliando la generica potenza $-h$:

$$y(n+h) = (-y(h)a_0 - \dots y(n-1+h)a_{n-1}) + (u(h)b_0 + \dots u(m+h)b_m) \tag{10.3-8}$$

E ponendo $k=n+h$ si ottiene:

$$y(k) = -y(k-n)a_0 - \dots y(k-1)a_{n-1} + u(k-n)b_0 + \dots u(m+k-n)b_m \tag{10.3-9}$$

Quindi noti i coefficienti della funzione di trasferimento discreta conosco l'algoritmo con cui deve regolare gli impulsi il microprocessore.